



UNIVERSIDADE CATÓLICA DE PELOTAS
ESCOLA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA
CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA/ELETRÔNICA



DETERMINAÇÃO DE MODELOS TEÓRICOS
COMPUTACIONALMENTE EFICIENTES PARA A ANÁLISE DE
FILTROS ADAPTATIVOS

Aluno: Fábio Pires Itturriet

Orientador: Márcio Holsbach Costa

FAPERGS

PROBIC

Pelotas, Julho de 2004.

SUMÁRIO

1. Dados de Identificação	1
1.1 Nome da Universidade	1
1.2 Órgão de Fomento	1
1.3 Escola/Curso	1
1.4 Título	1
1.5 Período das Atividades	1
1.6 Nome do Bolsista	1
1.7 Nome do Orientador	1
2. Introdução	1
3. Objetivos.....	1
4. Justificativa	2
5. Fundamentos Teóricos	2
5.1 Autovalores e Auvetores	2
5.2 Ruído Gaussiano.....	5
5.3 Filtros Seletivos em Frequência	6
5.3.1 Filtros Analógicos	8
5.3.2 Filtros Digitais	8
5.4 Filtros Adaptativos	10
5.4.1 Elementos de um Filtro Adaptativo.....	10
5.4.2 Aplicações	11
5.4.3 Combinador Linear Adaptativo	13
5.4.4 Filtragem Ótima.....	15
5.4.5 Algoritmo LMS	19
5.4.6 Algoritmo NLMS	20
5.4.7 Algoritmo LMF	20
5.4.8 Desempenho do Filtro Adaptativo.....	20
6. Metodologia.....	21
6.1 Simplificação do Modelo Teórico para o algoritmo NLMS.....	22
6.1.1 Erro Médio Quadrático.....	23
6.1.2 Comportamento Médio dos Coeficientes	24
6.1.3 Momentos de Segunda Ordem do Vetor Erro dos Coeficientes.....	25
6.2 Simplificação do Modelo Teórico para o algoritmo LMF	26

6.2.1	Erro Médio Quadrático.....	27
6.2.2	Comportamento Médio dos Coeficientes	28
6.2.3	Momentos de Segunda Ordem do Vetor Erro dos Coeficientes.....	28
7.	Resultados	29
8.	Discussão e Conclusões.....	31
9.	Bibliografia.....	31
10.	Anexo 1: Página na Internet.....	33
11.	Anexo 2: Publicações	34

1. DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

1.1 Nome da Universidade: Universidade Católica de Pelotas

1.2 Órgão de Fomento: FAPERGS - PROBIC

1.3 Escola/Curso: Curso de Engenharia Elétrica – Escola de Engenharia e Arquitetura

1.4 Título: Determinação de modelos teóricos computacionalmente eficientes para análise de filtros adaptativos.

1.5 Período das Atividades: Junho de 2003 a maio de 2004.

1.6 Nome do Bolsista: Fábio Pires Itturriet

1.7 Nome do Orientador: Márcio Holsbach Costa.

2. INTRODUÇÃO

A técnica de filtragem adaptativa é uma ferramenta amplamente utilizada na área de processamento de sinais. Inúmeras são suas aplicações, entre elas: identificação de sistemas, equalização, controle ativo de ruído e cancelamento de eco. Seu uso é especialmente indicado quando o conhecimento *a priori* sobre o sistema é pouco ou as condições de operação são variantes no tempo. O projeto desses sistemas é baseado nos resultados de simulações ou na análise de modelos teóricos quando disponíveis. De forma geral, modelos matemáticos são preferidos, visto que as interrelações entre os diversos parâmetros podem ser analisadas de forma explícita. Entretanto, em aplicações com elevado número de coeficientes, podem possuir uma elevada complexidade computacional, inviabilizando uma análise exaustiva das diferentes possibilidades pelo projetista. Por outro lado, simulações demandam tempo e não permitem uma visão global do comportamento do filtro em questão. Neste trabalho, é utilizada uma metodologia para simplificar computacionalmente modelos teóricos de filtros da família *Least Mean Square*, diminuindo a redundância de informação e consequentemente possibilitando tempos menores de processamento, como também diminuindo a exigência de plataformas de alta velocidade.

3. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo reduzir a complexidade computacional de modelos teóricos já existentes de algoritmos da família *Least Mean Square*, em especial

dos algoritmos *Normalized Least Mean Square* (NLMS) e *Least Mean Fourth* (LMF). Para isso foi utilizado um conjunto de simplificações matemáticas, de modo a reduzir o número de cálculos redundantes e conseqüentemente reduzir a complexidade computacional, criando modelos mais dinâmicos e eficientes.

4. JUSTIFICATIVA

A avaliação de desempenho de sistemas adaptativos através de simulações demanda tempo elevado e não permite uma visão global do seu comportamento.

Modelos teóricos possibilitam melhor entendimento das interrelações entre os diversos parâmetros do sistema adaptativo, porém, muitas vezes se caracterizam por elevado custo computacional. A existência de modelos computacionalmente eficientes permitiria uma maior popularização dos mesmos e conseqüentemente maior facilidade de projeto.

5. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nessa seção é apresentada uma revisão sobre os principais elementos necessários à compreensão desse trabalho.

A seguinte convenção será utilizada ao longo do trabalho: escalares serão representados por variáveis em itálico, vetores por minúsculas em negrito e matrizes por maiúsculas em negrito.

5.1 Autovalores e Autovetores

Seja **A** uma matriz quadrada de dimensão ($N \times N$). Diz-se que um escalar λ é um autovalor de **A** se existe um vetor (coluna) não nulo **q** para o qual

$$\mathbf{Rq} = \lambda \mathbf{q} \quad (1)$$

Todo vetor que satisfaz esta relação é então chamado de um *autovetor* de \mathbf{A} relacionado ao autovalor λ .

- Exemplo:

$$\text{Sejam } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{então } \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}_2 \end{cases}$$

Assim, \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 são autovetores de \mathbf{A} , relacionados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_1 = -1$ de \mathbf{A} .

A seguir serão apresentadas algumas propriedades de autovalores e autovetores [1]:

- **1º Propriedade:**

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ denotam os autovalores da matriz de correlação \mathbf{R} , então os autovalores da matriz \mathbf{R}^k são iguais a $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_M^k$ para qualquer valor inteiro $k > 0$.

Pré-multiplicando repetidamente ambos os lados de (1) pela matriz \mathbf{R} resulta

$$\mathbf{R}^k \mathbf{q} = \lambda^k \mathbf{q} \quad (2)$$

Isto mostra que: (a) se λ é um autovalor de \mathbf{R} então λ^k é um autovalor de \mathbf{R}^k e (b) cada autovetor de \mathbf{R} é um autovetor de \mathbf{R}^k .

- **2° Propriedade:**

Sendo $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ autovetores correspondentes a distintos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ de uma matriz de correlação \mathbf{R} de dimensão $(M \times M)$, respectivamente. Então os autovetores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ são linearmente independentes.

Diz-se que os autovetores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ são linearmente dependentes se existem escalares v_1, v_2, \dots, v_M , não nulos, de forma que

$$\sum_{i=1}^M v_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (3)$$

Se tais escalares não existirem, se diz que os autovetores são linearmente independentes.

- **3° Propriedade:**

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ os autovalores de uma matriz de correlação \mathbf{R} de dimensão $(M \times M)$, então todos os autovalores são reais e não negativos.

- **4° Propriedade:**

Sejam $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ os autovetores correspondentes a distintos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ de uma matriz de correlação \mathbf{R} , de dimensão $(M \times M)$, respectivamente, então os autovetores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ são ortogonais entre si.

$$\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (4)$$

onde o índice H significa hermitiana transposta

- **5º Propriedade:**

Sejam $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ os autovetores correspondentes a distintos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ de uma matriz de correlação \mathbf{R} de dimensão $(M \times M)$, respectivamente, definindo-se uma matriz \mathbf{Q} , de dimensão $(M \times M)$, cujas colunas sejam compostas pelos autovetores \mathbf{q}_i , de forma que

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_M] \quad (5)$$

então

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (6)$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$

- **6ª Propriedade:**

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$ os autovalores de uma matriz de correlação \mathbf{R} , de dimensão $(M \times M)$, então a soma desses autovalores é igual

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = \text{tr}\{\mathbf{\Lambda}\} = \text{tr}\{\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q}\} = \text{tr}\{\mathbf{R}\} \quad (7)$$

A equação (7) pode ser obtida através de

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (8)$$

5.2 Ruído Gaussiano

O termo ruído Gaussiano é utilizado para caracterizar sinais aleatórios que possuam uma distribuição densidade de probabilidade da seguinte forma [2]:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (9)$$

onde σ_x^2 é a variância do sinal aleatório x e μ a sua média.

Sinais com características Gaussianas são amplamente encontrados na Natureza e constituem uma importante aproximação para explicar o comportamento de uma série de sinais de interesse, como por exemplo sinais de voz.

Em algumas situações particulares é possível assumir-se que além de Gaussiano o sinal é branco. O ruído branco é todo o sinal que puder ser considerado como possuindo componentes em todas as frequências do espectro, média zero e ausência de correlação estatística entre duas amostras separadas no tempo.

5.3 Filtros Seletivos em Frequência

O principal objetivo da filtragem de sinais é melhorar a qualidade do sinal de acordo com um determinado critério de desempenho, através disto são realizadas a seguir algumas considerações sobre filtros.

Um filtro é um sistema que transforma o sinal de entrada, de uma determinada maneira, em um sinal de saída (Figura 1). Os sinais geralmente são considerados com relação às suas características tanto no domínio tempo como no domínio de frequência, da mesma forma, os requisitos de saída do filtro podem ser gerados em termos de tempo ou frequência.



Figura 1. Representação simbólica de um filtro.

Os filtros seletivos em frequência são filtros fixos, ou seja, seus coeficientes não variam durante seu funcionamento.

As características mais comuns dos filtros seletivos de frequência são [3]:

- a) Os filtros são lineares e invariantes no tempo.
- b) O processo de projeto utiliza informações sobre a banda de frequência em que o filtro atuará.
- c) Como os filtros são seletivos de frequência, eles funcionam melhor quando os vários componentes de frequência do sinal de entrada ocupam bandas não sobrepostas.
- d) Os coeficientes do filtro são escolhidos durante a fase de projeto e são mantidos constantes durante a operação normal do filtro.

Os tipos mais comuns de filtros seletivos de frequência são os filtros passa-altas, filtros passa-baixas e os filtros passa-faixa.

Filtros Passa-Baixas: Os filtros passa-baixas, Figura 2, permitem a passagem apenas de frequências abaixo da frequência de corte (f_c). Eles atuam eliminando ou atenuando os componentes de alta frequência do sinal de entrada.

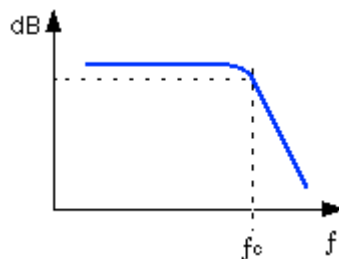


Figura 2. Gráfico de um filtro passa baixas.

Filtros Passa-Altas: Os filtros passa-altas, Figura 3, permitem a passagem apenas de frequências acima da frequência de corte (f_c). O funcionamento dos filtros passa-altas é similar aos passa-baixas só que eles eliminam ou atenuam os componentes de baixa frequência do sinal de entrada.

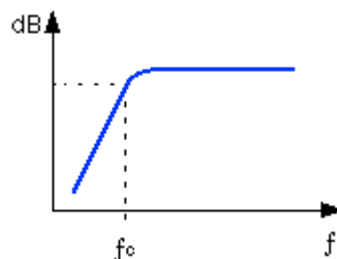


Figura 3. Gráfico de um filtro passa-altas.

Filtros Passa-Faixa: Os filtros passa-faixa, Figura 4, permitem apenas a passagem de sinais dentro de uma determinada faixa de freqüências. Eles eliminam ou atenuam os componentes de freqüência fora desta faixa.

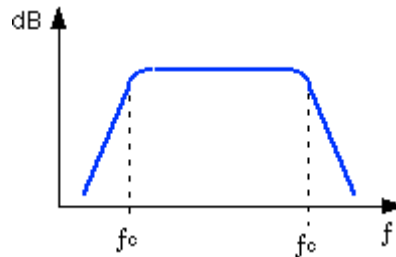


Figura 4. Gráfico de um filtro passa-faixa.

Os filtros seletivos em freqüência podem ser classificados de duas maneiras com relação à forma de implementação: forma analógica e forma digital.

5.3.1 Filtros Analógicos

Os filtros contínuos (analógicos) são blocos lineares básicos utilizados em diversos sistemas eletrônicos. São blocos imprescindíveis para circuitos de transmissão e recepção de sinal, nomeadamente para a realização de filtros *anti-aliasing* ou de reconstrução. São igualmente úteis na rejeição de ruído, ou na implementação de moduladores/desmoduladores.

A análise do comportamento dos filtros analógicos pode ser caracterizada pela sua resposta em freqüência. Neste âmbito é geralmente utilizada a sua função de transferência no domínio da transformada de Laplace. A representação do diagrama de amplitude e do diagrama de fase permite uma análise completa do comportamento do filtro.

5.3.2 Filtros Digitais

Os filtros digitais possuem diversas vantagens dentre elas podemos citar:

- a) O filtro digital é programável.(trocando parâmetros, trocamos o filtro);

- b) Filtros digitais tem seu projeto e teste muito simplificados em um computador;
- c) Estáveis a grandes variação de temperatura e ruídos;
- d) Várias topologias de filtro podem ser organizados em um único módulo DSP.

Filtros de Resposta Finita ao Impulso (FIR): Como seu nome expressa, a resposta desses filtros à aplicação de um impulso unitário acarreta em um sinal de saída que se extingue em um tempo finito (Figura 5). A vantagem de sua utilização reside nas seguintes características:

- a) Não são recursivos por isso são mais estáveis;
- b) Podem ser implementados através da FFT;
- c) Podem ter fase linear (podem ser utilizados em aplicações onde não é tolerada a distorção de fase);
- d) São analiticamente mais simples.

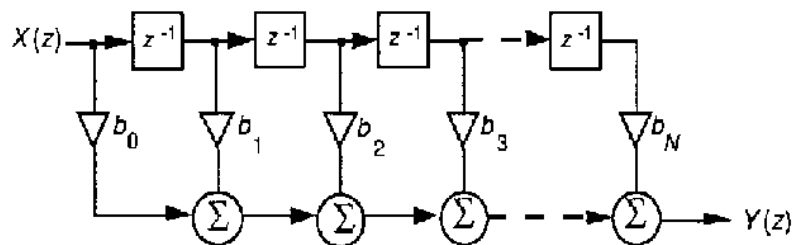


Figura 5. Estrutura de um filtro FIR.

Filtros de Resposta Finita ao Impulso (FIR): Sua resposta ao impulso unitário persiste indefinidamente, mesmo que possua tendência decrescente (Figura 6). Suas principais características são:

- a) Em geral a ordem do filtro IIR é mais baixa que a do FIR equivalente;
- b) São mais eficientes computacionalmente;

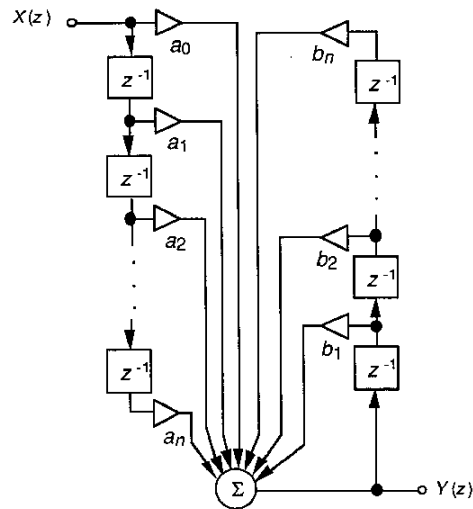


Figura 6. Estrutura para a implementação de um filtro IIR

5.4 Filtros Adaptativos

Existem diversas aplicações práticas que não podem ser resolvidas com sucesso utilizando filtros digitais fixos, ou porque não possuímos informação suficiente para projetar o filtro com coeficientes fixos ou porque os critérios do projeto mudam durante a operação. Uma boa parte destas aplicações podem ser resolvidas por um tipo especial de filtro chamado de filtro adaptativo. A característica dos filtros adaptativos que os distingue dos demais é que eles podem modificar sua resposta automaticamente para melhorar seu desempenho durante a operação.

5.4.1 Elementos de um Filtro Adaptativo

Os filtros adaptativos são formados por três módulos descritos a seguir (Figura 7):

- a) *Estrutura do Filtro:* Esse módulo produz a saída do filtro a partir de medições do sinal de entrada. A estrutura é fixa e seus parâmetros são ajustados pelo algoritmo adaptativo.
- b) *Critério de desempenho:* A saída do filtro adaptativo e a resposta desejada são processadas segundo um critério de desempenho, de modo a avaliar a qualidade do resultado em relação aos requisitos da aplicação.

c) *Algoritmo adaptativo*: O algoritmo adaptativo utiliza o valor do critério de desempenho, ou alguma função dele, e medições da entrada e da resposta desejada, para decidir como modificar os parâmetros do filtro para melhorar seu desempenho.

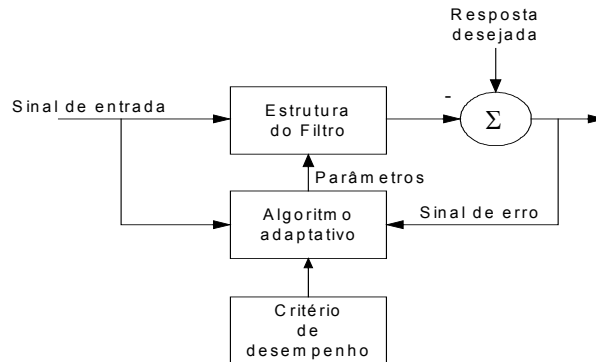


Figura 7. Elementos de um filtro adaptativo. Extraído de [4].

5.4.2 Aplicações

Existem várias aplicações onde os filtros adaptativos podem ser empregados. Essas aplicações podem ser classificadas em quatro classes principais: identificação de sistemas, inversão de sistemas, predição de sinal, e cancelamento de interferências [3,5].

Identificação de Sistemas: Essa classe de aplicação, também conhecida como modelagem de sistemas, é ilustrada na Figura 8. Algumas aplicações típicas dessa classe incluem o cancelamento de eco e a identificação de sistemas em aplicações de controle. No sistema da Figura 8, um sinal s é ao mesmo tempo entrada do filtro adaptativo e de um sistema desconhecido. Para reduzir o erro ε , o filtro adaptativo tenta emular o comportamento do sistema desconhecido.

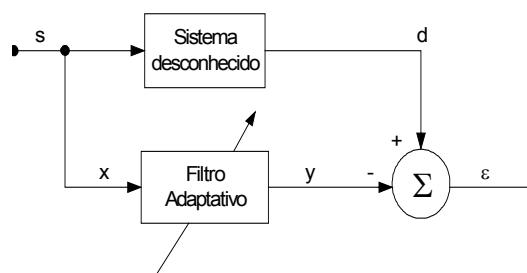


Figura 8. Identificação de sistemas. Extraído de [4].

Inversão de Sistemas: Essa classe de aplicação é conhecida também como modelagem inversa de sistemas. O objetivo do filtro adaptativo é estimar e aplicar a inversa do sistema. Algumas aplicações típicas incluem a equalização adaptativa, deconvolução sísmica e o controle inverso adaptativo. No sistema da Figura 9 o objetivo do filtro adaptativo é tentar recuperar uma versão atrasada do sinal s , que foi alterado por um sistema desconhecido e por ruído aditivo.

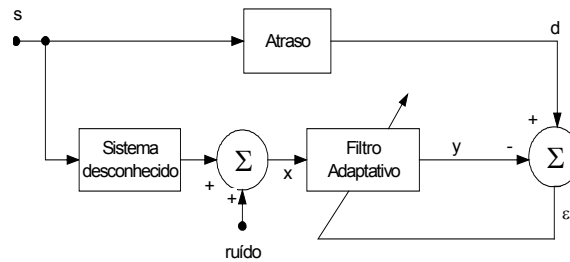


Figura 9. Inversão de sistemas. Extraído de [4].

Predição de Sinais: Na aplicação de predição da Figura 10, o sinal desejado d é próprio sinal de entrada s . O sinal x é o sinal s com atraso, o objetivo do filtro adaptativo é prever o sinal de entrada atual de modo que y cancele d .

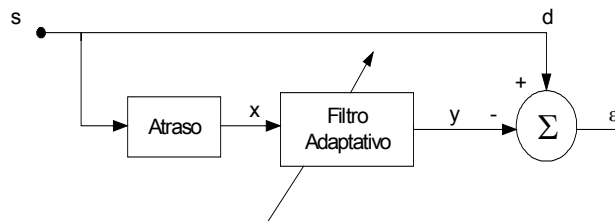


Figura 10. Predição de sinais. Extraído de [4].

Cancelamento de Interferências: A aplicação de cancelamento de interferências é ilustrada pelo esquema da Figura 11. Nesse esquema um sinal s corrompido por um ruído aditivo n e uma versão correlacionada n' de n estão disponíveis. O objetivo do filtro adaptativo é produzir uma saída y o mais parecido possível de n . Dessa maneira, a saída ε será bastante parecida com s .

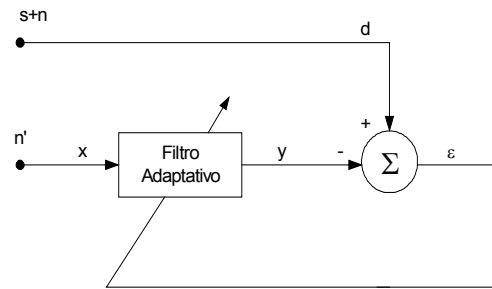


Figura 11. Cancelamento de interferências. Extraído de [4].

5.4.3 Combinador Linear Adaptativo

O combinador linear adaptativo (CLA), ou filtro adaptativo não recursivo, é utilizado na maioria dos filtros adaptativos e é o elemento individual mais importante em sistemas de aprendizado e processos adaptativos em geral [5].

O combinador é chamado de linear porque para um conjunto fixo de pesos a sua saída será a combinação linear dos elementos de entrada. Entretanto quando os pesos estão em processo de adaptação eles também são função dos componentes de entrada, e a saída do combinador deixa de ser uma função linear da entrada.

A Figura 12 mostra a forma geral de um combinador linear adaptativo.

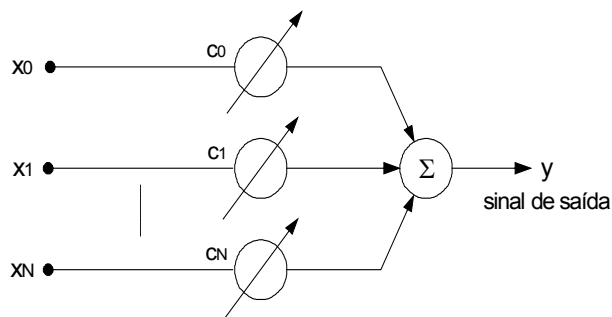


Figura 12. Forma geral de um combinador linear adaptativo.

O CLA possui um vetor de sinal de entrada com os elementos x_0, x_1, \dots, x_{N-1} , um conjunto correspondente de pesos c_0, c_1, \dots, c_{N-1} , uma unidade de soma e um sinal de saída y .

Os elementos do sinal de entrada podem ser interpretados de duas maneiras: entradas simultâneas de $N+1$ diferentes entradas (Figura 12) ou entrada seqüencial de $N+1$ amostras de um mesmo sinal (Figura 13). A representação do vetor de entrada para os dois casos é a seguinte:

a) Entradas múltiplas:

$$\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \quad x_1(n) \quad \cdots \quad x_{N-1}(n)]^T; \quad (10)$$

b) Entrada única:

$$\mathbf{x}(n) = [x(n) \quad x(N-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1)]^T \quad (11)$$

onde n é um índice de tempo discreto.

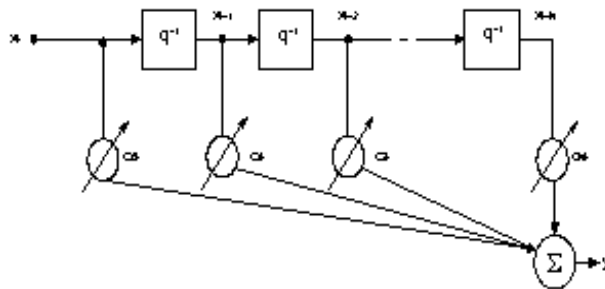


Figura 13. CLA com uma única entrada.

A partir de (10) e (11), obtêm-se a relação de entrada-saída para as Figuras 12 e 13:

a) Entradas múltiplas:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(n) x_i(n) \quad (12)$$

b) Entrada única:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i(n)x(n-i) \quad (13)$$

Pode-se representar (12) e (13) utilizando uma notação vetorial:

$$y(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (14)$$

onde: $\mathbf{c}(n) = [c_0(n) \quad c_1(n) \quad \dots \quad c_{N-1}(n)]^T$.

A Figura 14 mostra um combinador linear com o sinal de resposta desejado e o sinal de erro. O sinal de erro, $e(n)$ é obtido subtraindo o sinal de saída $y(n)$ do sinal desejado $d(n)$.

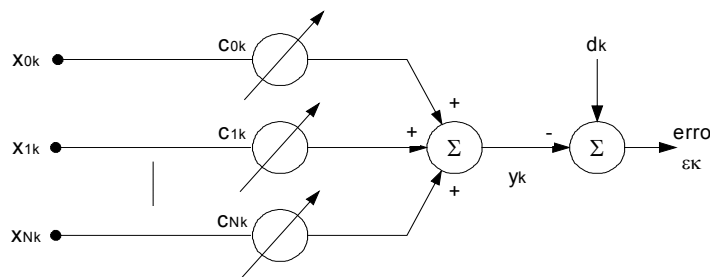


Figura 14. Combinador linear adaptativo com sinal de resposta desejado e sinal de erro.

5.4.4 Filtragem Ótima

No processo de adaptação o vetor de pesos do combinador linear é ajustado para produzir uma saída, $y(n)$, o mais próximo possível do sinal desejado. Isto é feito comparando a saída com a resposta desejada para se obter um sinal de erro e então ajustando o vetor de pesos para minimizar esse sinal.

O sinal de erro é dado por:

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (15)$$

Supondo-se que o valor dos coeficientes seja constante ao longo do tempo e substituindo (14) em (15) tem-se:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n) \quad (16)$$

De uma forma geral, a minimização do erro médio quadrático é a figura de mérito mais utilizada para verificar o desempenho da estimação.

Para se obter o erro quadrático instantâneo eleva-se (16) ao quadrado.

$$e^2(n) = d^2(n) + \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{c} - 2d(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{c} \quad (17)$$

Para se obter o erro médio quadrático avalia-se o valor esperado de (17):

$$E\{e^2(n)\} = E\{d^2(n)\} + \mathbf{c}^T E\{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)\} \mathbf{c} - 2E\{d(n) \mathbf{x}^T(n)\} \mathbf{c} \quad (18)$$

Pode-se representar a expressão (18) definindo uma matriz \mathbf{R} de autocorrelação do vetor de amostras do sinal de entrada como:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)\} = E \begin{bmatrix} x^2(n) & x(n)x(n-1) & \cdots & x(n)x(n-N+1) \\ x(n-1)x(n) & x^2(n-1) & \cdots & x(n-1)x(n-N+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x(n-N+1)x(n) & x(n-N+1)x(n-1) & \cdots & x^2(n-N+1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Os termos da diagonal principal de \mathbf{R} são o quadrado dos componentes da entrada e os termos fora da diagonal principal indicam a correlação entre os elementos da entrada. A matriz de correlação traz informações sobre a dependência entre os diversos termos do vetor $\mathbf{x}(n)$.

Pode-se também definir um vetor \mathbf{p} de correlação cruzada como:

$$\mathbf{p} = E\{d(n)\mathbf{x}(n)\} = E\left\{\begin{bmatrix} d(n)x(n) & d(n)x(n-1) & \cdots & d(n)x(n-N+1) \end{bmatrix}\right\}^T \quad (20)$$

Este vetor quantifica a dependência entre o sinal desejado e cada elemento do vetor de sinais de entrada.

Pode-se expressar (18) em termos de (19) e (20):

$$\xi = E\{e^2(n)\} = E\{d^2(n)\} + \mathbf{c}^T \mathbf{R} \mathbf{c} - 2\mathbf{p}^T \mathbf{c} \quad (21)$$

A partir da expressão (21) verifica-se que o erro médio quadrático (EMQ) é uma função côncava dos componentes do vetor de pesos \mathbf{c} , o que garante a existência de um mínimo global.

Para o caso de apenas dois coeficientes é possível traçar a superfície do erro médio quadrático. Na Figura 15 O eixo vertical representa o erro médio quadrático e os eixos horizontais os valores dos dois pesos.

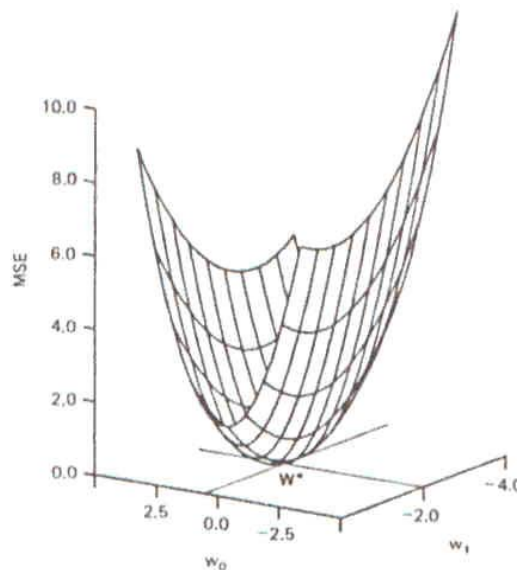


Figura 15. Superfície de erro. Extraído de [5].

Verifica-se portanto que a superfície de desempenho dada pela equação (21) possui um formato parabolóide e portanto apresenta um único mínimo. Sendo o EMQ o

critério de desempenho desejado, o objetivo então é determinar o vetor de coeficientes ótimos \mathbf{c}^o .

Uma maneira de se determinar o mínimo da superfície de erro quadrático é através do método do gradiente [5].

O gradiente da superfície de erro médio quadrático, $\nabla(\xi)$, pode ser encontrado diferenciando-se (21) em relação a cada peso:

$$\nabla(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{c}} = \left[\frac{\partial \xi}{\partial c_0} \quad \frac{\partial \xi}{\partial c_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \xi}{\partial c_{N-1}} \right]^T = 2\mathbf{R}\mathbf{c} - 2\mathbf{p} \quad (22)$$

Para se obter o erro médio quadrático mínimo, o vetor de pesos \mathbf{c} deverá ter seu valor ótimo, \mathbf{c}^o , isso acontece quando o gradiente for igual a zero:

$$\nabla(\xi) = 0 = 2\mathbf{R}\mathbf{c}^o - 2\mathbf{p} \quad (23)$$

Note-se que como a superfície de desempenho é parabolóide com a concavidade voltada para cima (Figura 15) não há necessidade de avaliar-se a derivada segunda (que indica se o ponto de gradiente nulo é máximo ou mínimo), pois necessariamente o ponto encontrado por (23) será de mínimo.

De (23) obtém-se o vetor de pesos ótimo \mathbf{c}^o

$$\mathbf{c}^o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (24)$$

Portanto, o filtro adaptativo deve utilizar um algoritmo que, através de sucessivas iterações modifique seus coeficientes de modo que estes se aproximem o máximo possível do resultado apresentado na equação (24). Como resultado, o erro médio quadrático será mínimo, acarretando que $y(n)$ será uma estimativa bastante aproximada de $d(n)$.

Uma maneira bastante intuitiva de se construir este algoritmo é inicializar os coeficientes com um valor qualquer e a cada iteração dar pequenos passos em direção contrária ao gradiente da superfície de desempenho. Deste modo a cada iteração se terá uma melhor aproximação de \mathbf{c}^0 . O algoritmo desta forma é mostrado em (25).

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + \frac{\mu}{2}(-\nabla(\xi)) \quad (25)$$

5.4.5 Algoritmo LMS

O algoritmo LMS é importante pela sua simplicidade e facilidade de computação. Se o sistema adaptativo é um combinador linear adaptativo, e o vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ e a resposta desejada $d(n)$ estão disponíveis a cada iteração, o algoritmo LMS é geralmente a melhor escolha para muitas aplicações de processamento adaptativo de sinais [5].

Muitos algoritmos adaptativos estimam o gradiente de $\xi = E\{e^2(n)\}$ tomando diferenças entre pequenos termos de $e^2(n)$. Já o algoritmo LMS utiliza o próprio $e^2(n)$ como uma estimativa do MSE.

Então a cada iteração do processo adaptativo, temos uma estimativa do gradiente da forma:

$$\nabla(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial c_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial c_{N-1}} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial e^2(n)}{\partial c_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial e^2(n)}{\partial c_{N-1}} \end{bmatrix} = 2e(n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e(n)}{\partial c_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial e(n)}{\partial c_{N-1}} \end{bmatrix} = -2e(n)\mathbf{x}(n) \quad (26)$$

Substituindo (26) em (25) pode se definir o algoritmo como:

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + \mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (27)$$

onde μ é a constante de ganho que regula a velocidade e a estabilidade da adaptação.

O algoritmo LMS pode ser implementado sem operações de média, divisão, raiz, ou diferenciação e é elegante em sua simplicidade e eficiência [5].

5.4.6 Algoritmo NLMS

O algoritmo NLMS ou LMS normalizado é uma variação do LMS. Ele aplica em sua fórmula uma normalização do sinal de entrada. Essa normalização provoca a utilização de passos de convergência variáveis, de acordo com a potência do sinal de entrada $\mathbf{x}(n)$. O passo de convergência μ será inversamente proporcional à potência do sinal de entrada $\mathbf{x}(n)$. A fórmula do NLMS é apresentada em (28).

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + \frac{\beta}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + \delta} e(n)\mathbf{x}(n) \quad (28)$$

onde δ é uma constante pequena e positiva que evita divisões por zero quando o produto $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)$ é nulo.

5.4.7 Algoritmo LMF

O algoritmo *Least Mean Fourth* (LMF), da mesma forma que o LMS e NLMS, pertence à família dos algoritmos do gradiente estocástico. Entretanto, seu objetivo é a minimização do erro médio elevado à quarta ordem.

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + \mu \cdot e^3(n) \cdot \mathbf{x}(n) \quad (29)$$

Ele possui a vantagem de possuir um desajuste menor que o LMS em determinadas condições.

5.4.8 Desempenho do Filtro Adaptativo

Algumas características do processo de adaptação são de grande utilidade para a análise e o entendimento do comportamento dos filtros adaptativos. A mais importante

delas é a curva de aprendizado que caracteriza o desempenho de um filtro adaptativo e é amplamente utilizada em estudos teóricos e experimentais [3].

A curva de aprendizado relaciona o erro médio quadrático (EMQ) em função do tempo. Quando o filtro adaptativo inicia sua operação, os seus coeficientes podem possuir valores bem diferentes de \mathbf{c}^o (vetor de coeficientes ótimo), causando um EMQ grande. Durante a execução do algoritmo, os coeficientes vão se aproximando de \mathbf{c}^o , causando por consequência, uma diminuição do EMQ, esta fase é chamada de adaptação. Após esta fase o filtro entra no modo de regime permanente. A Figura 16 mostra os modos de operação de um filtro adaptativo.

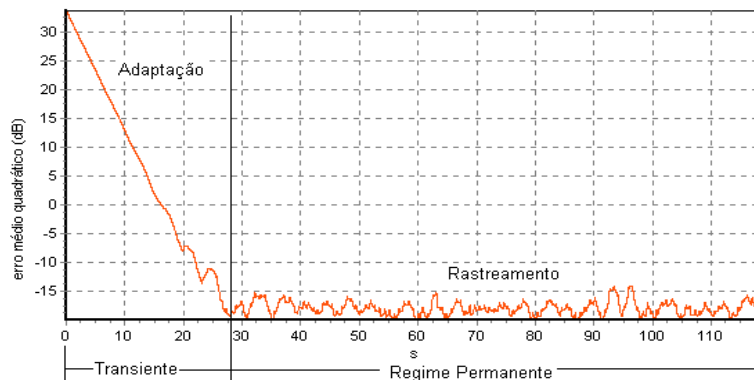


Figura 16. Modos de operação de um filtro adaptativo.

A duração do modo de transição caracteriza a velocidade de adaptação do filtro adaptativo e o regime permanente caracteriza a qualidade da adaptação. Quanto menor for o erro em regime permanente melhor terá sido o cancelamento do ruído.

6. METODOLOGIA

O procedimento de simplificação utilizado neste trabalho baseia-se na decomposição da matriz de autocorrelação do sinal de excitação em termos de suas matrizes de autovalores e autovetores. Com isso é possível substituir as equações matriciais recursivas por equações vetoriais, diminuindo assim a complexidade das operações necessárias para avaliar o comportamento do algoritmo. Inicialmente será apresentada a metodologia para o NLMS e posteriormente para o LMF.

6.1 Simplificação do Modelo Teórico para o Algoritmo NLMS

O modelo teórico mais representativo do comportamento do algoritmo NLMS disponível na literatura é o desenvolvido por Bermudez e Costa (2002) [6]. As equações que regem seu comportamento são apresentadas a seguir:

- Equação do erro médio quadrático

$$E\{e^2(n)\} = \xi(n) = \sigma_z^2 + \text{tr}\{\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\} \quad (30)$$

- Equação do comportamento médio dos coeficientes

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \left[\mathbf{I} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{R}_{xx} \right] E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (31)$$

- Equação dos momentos de segunda ordem

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} [\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)] \\ + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} [2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{xx} + \xi(n)\mathbf{R}_{xx}] \end{aligned} \quad (32)$$

onde:

$\mathbf{K}(n)$: é a matriz de correlação do vetor erro dos coeficientes;

μ_0 : é o passo de convergência;

σ_z^2 : é a variância do ruído de medição;

\mathbf{R}_{xx} : é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada;

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^0$: é o vetor erro dos coeficientes;

N : representa o número de coeficientes da planta e do filtro adaptativo;

\mathbf{w}^0 : é o vetor de coeficientes da planta;

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$: é o vetor de coeficientes do filtro adaptativo;

\mathbf{I} : é a matriz identidade;

6.1.1. Erro Médio Quadrático

Sendo \mathbf{R}_{xx} a matriz de autocorrelação do vetor do sinal de excitação, e portanto semi-definida positiva, pode-se expressá-la da seguinte maneira:

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (33)$$

onde \mathbf{Q} é a matriz de autovetores associados a \mathbf{R}_{xx} e $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz de autovalores. Substituindo (33) em (30) obtém-se:

$$E\{e^2(n)\} = \sigma_z^2 + tr\{\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\} \quad (34)$$

Sabendo-se que $tr\{A \cdot B\} = tr\{B \cdot A\}$, então:

$$E\{e^2(n)\} = \sigma_z^2 + tr\{\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)\} \quad (35)$$

onde

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q} \quad (36)$$

Como $\mathbf{\Lambda}$ é diagonal e sabendo que o traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal da mesma, podemos escrever a seguinte relação:

$$tr\{\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)\} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{p}(n) \quad (37)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor que contém os elementos da diagonal principal de $\mathbf{\Lambda}$, e $\mathbf{p}(n)$ é um vetor que contém os elementos da diagonal principal de $\mathbf{P}(n)$. Para comprovar esta relação pode-se realizar o seguinte equacionamento:

$$\begin{aligned}
tr\{\Lambda \mathbf{P}(n)\} &= tr\left\{\begin{bmatrix} \lambda_{00} & 0 \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{00}(n) & \mathbf{p}_{01}(n) \\ \mathbf{p}_{10}(n) & \mathbf{p}_{11}(n) \end{bmatrix}\right\} \\
&= tr\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{00}(n)\lambda_{00} & \mathbf{p}_{01}(n)\lambda_{00} \\ \mathbf{p}_{10}(n)\lambda_{11} & \mathbf{p}_{11}(n)\lambda_{11} \end{bmatrix}\right\} \\
&= \mathbf{p}_{00}(n)\lambda_{00} + \mathbf{p}_{11}(n)\lambda_{11}
\end{aligned} \tag{38}$$

enquanto que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{p}(n) &= [\lambda_{00} \quad \lambda_{11}] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{00}(n) \\ \mathbf{p}_{11}(n) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{p}_{00}(n)\lambda_{00} + \mathbf{p}_{11}(n)\lambda_{11}
\end{aligned} \tag{39}$$

Através de (38) e (39) pode-se verificar a igualdade das representações descritas em (37). A partir disso, finalmente chega-se a equação final do Erro médio Quadrático.

$$E\{e^2(n)\} = \sigma_z^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{p}(n) \tag{40}$$

6.1.2. Comportamento Médio dos Coeficientes

Substituindo-se (33) em (31) e pré multiplicando-se por \mathbf{Q}^T , obtém-se:

$$\mathbf{Q}^T E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \mathbf{Q}^T \left[\mathbf{I} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T \right] E\{\mathbf{v}(n)\} \tag{41}$$

Sabendo-se que

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \tag{42}$$

e substituindo-se (42) em (41), chega-se em:

$$\mathbf{Q}^T E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \mathbf{Q}^T \left[\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T \right] E\{\mathbf{v}(n)\} \tag{43}$$

Manipulando-se (43) obtém-se

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \mathbf{Q}^T \left[\mathbf{Q} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \right] E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (44)$$

onde

$$E\{\mathbf{v}(n)\} = \mathbf{Q}^T E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (45)$$

Utilizando-se (42) em (44) chega-se finalmente a

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = \left[\mathbf{I} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \boldsymbol{\Lambda} \right] E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (46)$$

6.1.3. Momentos de Segunda Ordem do Vetor Erro de Coeficientes

A equação (32) é uma equação recursiva matricial. Visto que $\mathbf{K}(n)$ é uma matriz simétrica então conclui-se que a equação (32) possui alto grau de redundância. Para sua simplificação procede-se da seguinte maneira:

Pré multiplicando-se (32) por \mathbf{Q}^T e pós-multiplicando-se por \mathbf{Q} obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n+1) \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \left[\mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} \left[2\mathbf{Q}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{Q} + \xi(n) \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{Q} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Substituindo-se (33) em (47), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n+1) \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \left[\mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} \left[2\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} + \xi(n) \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Substituindo-se (36) em (48) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) = & \mathbf{P}(n) - \frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} [\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)] \\ & + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} [2\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} + \xi(n)\mathbf{\Lambda}] \end{aligned} \quad (49)$$

Em decorrência da característica diagonal de $\mathbf{\Lambda}$ tem-se que:

$$\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n) \quad (50)$$

e portanto, substituindo-se (50) em (49), obtém-se:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) - 2\frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n) + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} [2\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} + \xi(n)\mathbf{\Lambda}] \quad (51)$$

Note-se que:

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}(n) = \mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}(n) \quad (52)$$

Substituindo-se (52) em (51) é fácil verificar o desacoplamento do conjunto de equações em (51), de forma que os elementos de sua diagonal principal podem ser expressos da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}(n+1) = \left[\mathbf{I} - 2\frac{\mu_0}{\sigma_x^2} \frac{N}{N-2} \mathbf{\Lambda} + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} 2\mathbf{\Lambda}^2 \right] \mathbf{p}(n) + \frac{\mu_0^2}{\sigma_x^4} \frac{N^2}{(N-2)(N-4)} \xi(n)\boldsymbol{\lambda} \quad (53)$$

6.2. Simplificação do Modelo Teórico para o Algoritmo LMF

O modelo teórico mais representativo do comportamento do algoritmo LMF disponível na literatura é o desenvolvido por Hübsher e Bermudez em (2001). As equações que regem seu comportamento são dadas por [7]:

- Equação do erro médio quadrático

$$E\{e^2(n)\} = \sigma_z^2 + tr\{\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\} \quad (54)$$

- Equação do comportamento médio dos coeficientes

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = [\mathbf{I} - 3\mu E\{e^2(n)\}\mathbf{R}_{xx}]E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (55)$$

- Equação dos momentos de segunda ordem

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = \mathbf{K}(n) - 3\mu E\{e^2(n)\}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)] \\ + 15\mu^2 E\{z^4(n)\}\{tr\{\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\}\mathbf{I} + 2\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\}\mathbf{R}_{xx} + \mu^2 E\{z^6(n)\}\mathbf{R}_{xx} \end{aligned} \quad (56)$$

onde:

$\mathbf{K}(n)$: é a matriz de correlação do vetor erro dos coeficientes;

μ : é o passo de convergência;

σ_z^2 : é a variância do ruído de medição

\mathbf{R}_{xx} : matriz de autocorrelação do sinal de entrada;

$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^0$: é o vetor erro dos coeficientes;

N : representa o número de coeficientes da planta e do filtro adaptativo;

\mathbf{w}^0 : é o vetor de coeficientes da planta;

$\mathbf{w}(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]^T$: é o vetor de coeficientes do filtro adaptativo;

\mathbf{I} : é a matriz identidade;

$E\{z^4(n)\}$: é o valor esperado do ruído aditivo elevado a quarta potência;

$E\{z^6(n)\}$: é o valor esperado do ruído aditivo elevado a sexta potência.

6.2.1. Erro Médio Quadrático

A simplificação do erro médio quadrático do algoritmo LMF é realizada da mesma forma que a descrita na seção 6.1.1 do algoritmo NLMS.

6.2.2. Comportamento Médio dos Coeficientes

Pré multiplicando-se a equação (55) por \mathbf{Q}^T e utilizando-se (33) e (42), obtém-se após certa manipulação:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = [\mathbf{I} - 3\mu E\{e^2(n)\}\boldsymbol{\Lambda}]E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (57)$$

onde:

$$E\{\mathbf{v}(n)\} = \mathbf{Q}^T E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (58)$$

Substituindo-se a equação do erro médio quadrático (40), chega-se em:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = [\mathbf{I} - 3\mu\sigma_z^2\boldsymbol{\Lambda} + 3\mu\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{p}(n)\boldsymbol{\Lambda}]E\{\mathbf{v}(n)\} \quad (59)$$

6.2.3. Momentos de Segunda Ordem do Vetor Erro de Coeficientes

O mesmo procedimento apresentado para a simplificação dos momentos de segunda ordem do algoritmo NLMS é utilizado novamente. Inicialmente, pré e pós-multiplica-se a equação (56) por \mathbf{Q}^T e \mathbf{Q} , respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n+1)\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q} - 3\mu E\{e^2(n)\}[\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}] \\ &\quad + 15\mu^2 E\{z^4(n)\}\{tr\{\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\}\mathbf{I} + 2\mathbf{Q}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}\}\mathbf{R}_{xx} + \mu^2 E\{z^6(n)\}\mathbf{R}_{xx} \end{aligned} \quad (60)$$

Substituindo-se (33) em (60) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n+1)\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q} - 3\mu E\{e^2(n)\}[\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}] \\ &\quad + 15\mu^2 E\{z^4(n)\}\{tr\{\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\}\mathbf{I} + 2\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T\mathbf{K}(n)\mathbf{Q}\}\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T + \mu^2 E\{z^6(n)\}\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (61)$$

Substituindo-se (36) em (61) chega-se em:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) = & \mathbf{P}(n) - 3\mu E\{e^2(n)\} [\mathbf{P}(n)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda P}(n)] \\ & + 15\mu^2 E\{z^4(n)\} \{tr\{\mathbf{\Lambda P}(n)\}\mathbf{I} + 2\mathbf{\Lambda P}(n)\} \mathbf{\Lambda} + \mu^2 E\{z^6(n)\} \mathbf{\Lambda} \end{aligned} \quad (62)$$

Substituindo (50) e (52) em (62):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) = & [\mathbf{I} - 6\mu E\{e^2(n)\} \mathbf{\Lambda} + 30\mu^2 E\{z^4(n)\} \mathbf{\Lambda \Lambda}] \mathbf{P}(n) \\ & + \mu^2 [15E\{z^4(n)\} tr\{\mathbf{\Lambda P}(n)\} + E\{z^6(n)\}] \mathbf{\Lambda} \end{aligned} \quad (63)$$

e finalmente, agrupando-se apenas os elementos da diagonal principal de (63):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(n+1) = & [\mathbf{I} - 6\mu E\{e^2(n)\} \mathbf{\Lambda} + 30\mu^2 E\{z^4(n)\} \mathbf{\Lambda \Lambda}] \mathbf{p}(n) \\ & + \mu^2 [15E\{z^4(n)\} tr\mathbf{\lambda}^T \mathbf{p}(n) + E\{z^6(n)\}] \mathbf{\lambda} \end{aligned} \quad (64)$$

7. RESULTADOS

A implementação original dos modelos teóricos do NLMS e LMF, segundo [6] e [7], é realizada através do seguinte conjunto de equações:

- Implementação original do modelo do NLMS: equações (30), (31) e (32).
- Implementação original do modelo do LMF: equações (53), (55) e (56).

A implementação eficiente, derivada ao longo deste trabalho é dada por:

- Implementação eficiente do modelo do NLMS: equações (40), (46) e (53).
- Implementação eficiente do modelo do LMF: equações (40), (59) e (64).

As Figuras (17) e (18) apresentam comparações entre os modelos originais (vermelho) e os eficientes (azul) para os algoritmos NLMS e LMF. Em cada uma delas, o eixo horizontal representa o número de coeficientes utilizado e o eixo vertical o tempo

necessário para a avaliação das equações em segundos. Foram realizadas 10000 iterações do processo de adaptação utilizando-se para tanto o programa MatLab 6.0, *release* 12, em um computador AMD ATHLON XP 1700 com 256 Mbytes de memória.

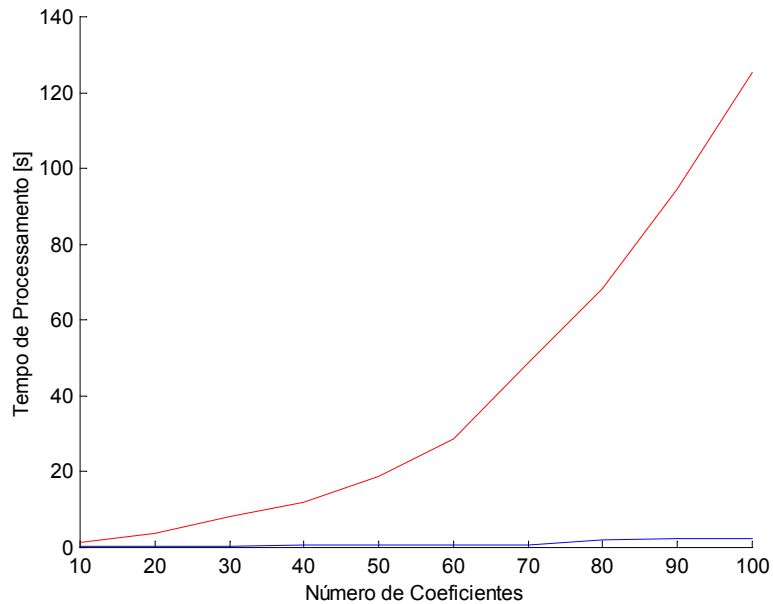


Figura 17. Confrontação entre o tempo de processamento e o número de coeficientes para os modelos original (vermelho) e eficiente (azul) do NLMS.

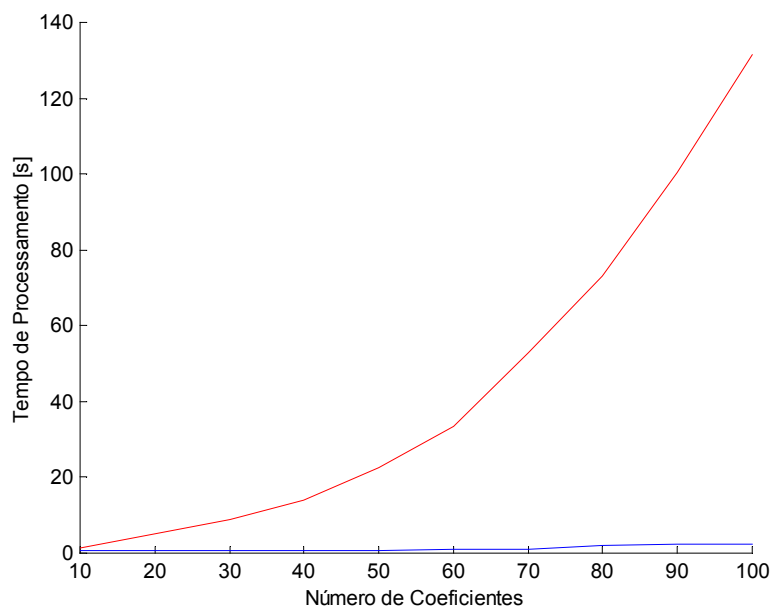


Figura 18. Confrontação entre o tempo de processamento e o número de coeficientes para os modelos original (azul) e eficiente (vermelho) do LMF.

8. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foram discutidos os diversos tópicos necessários à compreensão do problema. A base matemática foi apresentada, resultando na implementação prática dos modelos teóricos eficientes.

Os programas foram desenvolvidos em MatLab e disponibilizados para a comunidade interessada em uma página na Internet

Os resultados obtidos na Seção 7 demonstram a grande diminuição de tempo de processamento em função da diminuição do custo computacional das equações. Nota-se claramente que o ganho na redução de tempo dos novos algoritmos é maior à medida que o número de coeficientes aumenta, tornando-os úteis principalmente em aplicações do tipo cancelamento de eco e controle ativo de ruído.

Como conclusão, temos que os modelos implementados neste trabalho chegam aos mesmos resultados dos modelos já existentes, entretanto com o tempo de execução diminuído consideravelmente.

9. BIBLIOGRAFIA

- [1] Haykin, S. (1996), Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall.

- [2] NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>

- [3] Manolakis, D.G., Ingle, V.K., Kogon, S.M. (2000), “Statistical and Adaptive Signal Processing – Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing”, McGraw-Hill.

- [4] Born, R.S. (2000), Filtros Adaptativos Aplicados a Sinais Biomédicos, Monografia de Conclusão de Curso, Bacharelado em Ciência da Computação, Universidade Federal de Pelotas.

- [5] Widrow, B., Stearns S.D., (1985), Adaptive Signal Processing. Prentice-Hall.
- [6] Costa, M.H., Bermudez, J.C.M. (2002), “An Improved Model for The Normalized LMS Algorithm with Gaussian Inputs and Large Number of Coefficients”, *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, páginas 1-4.
- [7] Hübscher, P.I., Bermudez, J.C.M. (2003) “An Improved Statistical Analysis of the Least Mean Fourth (LMF) Adaptive Algorithm”, *IEEE Transactions on signal Processing*, volume 51, número 3, páginas 664-671.

Fábio Pires Itturriet
(bolsista)

Márcio Holsbach Costa
(orientador)

ANEXO 1: Página na Internet

Após a repercussão positiva do trabalho e tendo em vista a grande área de aplicação dos filtros adaptativos, foi criado um *site* que disponibiliza os resultados *on-line*. O *site* tem como objetivo auxiliar projetistas de filtros, alunos de graduação, pós-graduação e estudiosos da área.

O *site* contém os programas com os quais foram obtidos os resultados disponíveis no trabalho em versões para MATLAB e SCILAB e também para outros algoritmos que não estão disponíveis no trabalho, além de fotos dos laboratórios do curso e informações sobre o bolsista e o orientador.

O endereço do site é <http://atlas.ucpel.tche.br/~fpires> e para o pouco tempo que está no ar conta com um número grande de acessos, inclusive de países da Europa.

ANEXO 2: Publicações

Ao longo do trabalho foram realizadas as seguintes apresentações:

1. Itturriet, F.P., Costa, M.H. (2003), “Determinação de Modelos Teóricos Computacionalmente Eficientes para a Análise de Filtros Adaptativos”, XII Congresso de Iniciação Científica. Universidade Católica de Pelotas, 02-03 novembro, Pelotas-RS.
2. Itturriet, F.P., Costa, M.H. (2003), “Determinação de Modelos Teóricos Computacionalmente Eficientes para a Análise de Filtros Adaptativos”, II Mostra de Iniciação de Científica, Universidade da Região da Campanha, 05-07 novembro, Bagé-RS.
3. Costa, M.H., Costa, G.H., Bermudez, J.C.M., Itturriet, F.P. (2004), “Algoritmos Rápidos para a Implementação de Modelos Teóricos de Filtros Adaptativos”, XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, submetido para publicação.

A seguir são anexados o resumo e o artigo.

DETERMINAÇÃO DE MODELOS TEÓRICOS COMPUTACIONALMENTE EFICIENTES PARA A ANÁLISE DE FILTROS ADAPTATIVOS

Autores: Fábio Pires Itturriet e Márcio Holsbach Costa

Aluno apresentador: Fábio Pires Itturriet

Orientador: Márcio Holsbach Costa

Resumo

A técnica de filtragem adaptativa é uma ferramenta amplamente utilizada na área de processamento de sinais. Inúmeras são suas aplicações, entre elas: identificação de sistemas, equalização, controle ativo de ruído e cancelamento de eco. Seu uso é especialmente indicado quando o conhecimento *a priori* sobre o sistema é pouco ou as condições de operação são variantes no tempo. O projeto destes sistemas é baseado nos resultados de simulações ou na análise de modelos teóricos quando disponíveis. De uma forma geral, modelos matemáticos são preferidos, visto que as interrelações entre os diversos parâmetros podem ser analisadas de forma explícita. Entretanto, em aplicações com elevado número de coeficientes, podem possuir uma elevada complexidade computacional, inviabilizando uma análise exaustiva das diferentes possibilidades pelo projetista. Por outro lado, simulações demandam tempo e não permitem uma visão global do comportamento do filtro em questão. Neste trabalho, é apresentada uma metodologia para simplificar computacionalmente modelos teóricos de filtros da família *Least Mean Square*, diminuindo a redundância de informação e conseqüentemente possibilitando tempos menores de processamento, como também diminuindo a exigência de plataformas de alta velocidade.