Resposta de Sistemas LIT a Exponenciais Complexas

O que ocorre quando $x(t) = e^{st}, s \in \mathbb{C}$?

Resposta ao estado zero do sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

Resposta de Sistemas LIT a Exponenciais Complexas

O que ocorre quando $x(t) = e^{st}, s \in \mathbb{C}$?

Resposta ao estado zero do sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

Como s e t são constantes para a integração em τ,

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

$H(s)$ não é função da variável t

Assumindo que a integral $H(s)$ converge,

$$\boxed{x(t) = e^{st} \quad \rightarrow \quad y(t) = H(s)e^{st}}$$

Como

$$e^{st} \quad \rightarrow \quad H(s)e^{st}$$

e^{st} é autofunção de qualquer sistema LIT

Como

$$e^{st} \quad \rightarrow \quad H(s)e^{st}$$

e^{st} é autofunção de qualquer sistema LIT

Se

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \ldots + a_n e^{s_N t}$$

$$\Rightarrow y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + \ldots + a_n H(s_N) s^{s_N t}$$

com

$$H(s_k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-s_k t} dt, \qquad k = 1, \ldots, N$$

Obs:

Sinais exponenciais complexos também podem servir como base para o estudo de sistemas LIT

- se pudermos decompor os sinais de interesse em somas de exponenciais complexas
- se determinarmos $H(s)$

$\Rightarrow$ A resposta a um sinal genérico $x(t) = e^{st}$ (s parâmetro) caracteriza o comportamento do sistema LIT

Análise de Sistemas LIT
Usando a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace

Sinal $x(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Análise de Sistemas LIT
Usando a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace

Sinal $x(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Obs:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \qquad \leftarrow$$

Transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema

Análise de Sistemas LIT
Usando a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace

Sinal $x(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

Obs:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad \leftarrow$$

Transformada de Laplace da resposta ao impulso do sistema

A transformada de Laplace unilateral

Desconsidera $x(t)$ para $t < 0^-$

$$X_u(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

As duas transformadas coincidem para sinais causais $(x(t) = 0$ para $t < 0)$

Exemplo:

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-st}dt \\ &= \quad \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{-1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

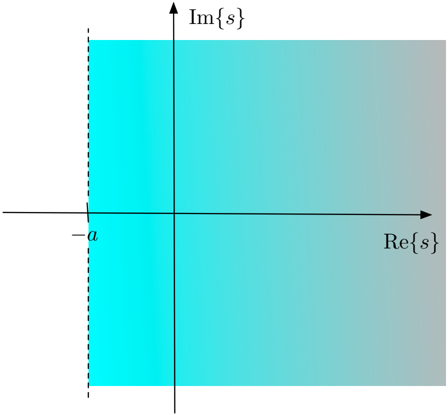
Como $s = \sigma + j\omega$

$X(s)$ converge apenas para $\sigma + a > 0$ ou $\boxed{\sigma > -a}$

Assim

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{Re}\{s\} > -a}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{Re}\{s\} > -a$$



Obs:

Para valores de s fora da R.C. a expressão $\dfrac{1}{s+a}$ não é a Transformada de Laplace de $x(t)$

Exemplo:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)\,e^{-st}dt$$

$$= - \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_{-\infty}^{0}$$

Como $s = \sigma + j\omega \Rightarrow \left[e^{-(\sigma+a)t}\,e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{0}$

$X(s)$ converge apenas para $\sigma + a < 0$ ou $\boxed{\sigma < -a}$

Assim

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{Re}\{s\} < -a}$$

Exemplo:

$x(t) = e^{s_0 t} u(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 t} u(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{(s_0 - s)t} dt = \frac{1}{s_0 - s} \left[e^{(s_0 - s)t} \right]_0^{\infty}$$

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \quad s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = \frac{1}{s_0 - s} \left[e^{(\sigma_0 - \sigma)t}\, e^{j(\omega_0 - \omega)t} \right]_0^{\infty}$$

R.C.: $\sigma_0 - \sigma < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma > \sigma_0$ ou $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$

$$\Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{s - s_0}, \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}}$$

Obs: A transformada de Laplace é linear

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s)$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s)$$

$$a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \leftrightarrow a_1\, X_1(s) + a_2\, X_2(s)$$

$\Rightarrow$ A transformada de Laplace de soma de exponenciais será sempre uma função racional em s

Região de Convergência para Funções $X(s)$ Racionais

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, s^k} = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{k=1}^{M} \overbrace{(s - z_k)}^{zeros}}{\prod_{k=1}^{N} \underbrace{(s - p_k)}_{polos}}$$

Exemplo:

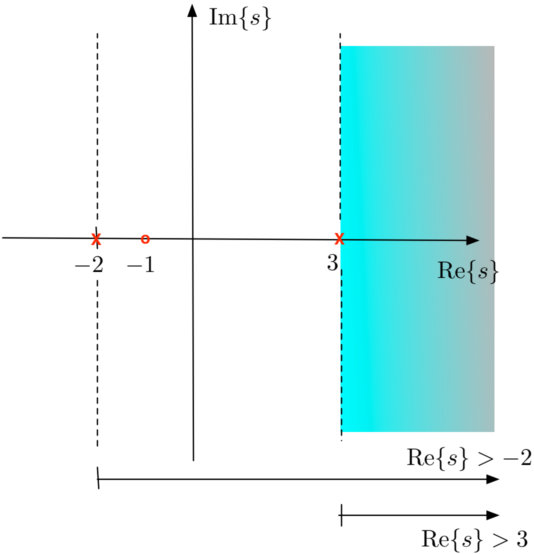
$$x(t) = \frac{1}{5}\, e^{-2t}\, u(t) + \frac{4}{5}\, e^{3t}\, u(t)$$

$$e^{-2t}\, u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$e^{3t}\, u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-3}, \quad \text{Re}\{s\} > 3$$

$$X(s) = \frac{1}{5}\, \frac{1}{s+2} + \frac{4}{5}\, \frac{1}{s-3} = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}, \quad \text{Re}\{s\} > 3$$

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)}, \quad \text{Re}\{s\} > 3$$



Propriedades de Região de Convergência (R.C.)

1) A R.C. consiste de faixas paralelas ao eixo $s = j\omega$ ($\sigma = 0$)

$\Rightarrow$ Quem determina a R.C. são as partes reais dos polos de $X(s)$

2) A R.C. não contém polos de $X(s)$

3) Se $x(t)$ tem duração limitada e é absolutamente integrável, a R.C. de $X(s)$ é todo o plano s

4) Se $x(t) = 0$ para $t < 0$, a R.C. de $X(s)$ é à direita do polo de $X(s)$ com maior parte real

5) Se $x(t) = 0$ para $t > 0$, a R.C. de $X(s)$ é à esquerda do polo de $X(s)$ com menor parte real

6) A R.C. é sempre delimitada por polos de $X(s)$ ou estende-se até infinito

A transformada de Laplace inversa

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

- integral de linha no plano complexo
- pode ser calculada usando integração pelo método dos resíduos (variáveis complexas)
- a constante c deve ser escolhida para que a linha de integração pertença à R.C. de $X(s)$

Teorema dos Resíduos

Seja $F(s)$ uma função analítica dentro de um caminho fechado C, exceto em um número finito de pontos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dentro de C. Então

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C F(s)ds = \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\{F(s_k)\}$$

Para $F(s) = X(s)\,e^{st}$ a integral é calculada no sentido anti-horário para $t > 0$ e horário para $t < 0$

$$\text{Res}\{F(s_k)\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_k}\left\{\frac{d^{m-1}}{d\,s^{m-1}}\left[(s-s_k)^m F(s)\right]\right\}$$

Para uma singularidade s_k de ordem m

Transformada Inversa Usando Expansão em Frações Parciais

- Transformadas $X(s)$ polinomiais
- Uso de algumas transformadas básicas pré-determinadas

Uma das transformadas mais usadas:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Exemplo

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = X(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{(-1)+2}{(-1)+3} = \frac{1}{2}$$

$$B = X(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{(-3)+2}{(-3)+1} = \frac{1}{2}$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

Temos então

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}, \quad \text{Re}\{s\} > -3$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Deslocamento no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s), \quad RC$$

Propriedades da Transformada de Laplace

Deslocamento no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s), \quad RC$$

Deslocamento no domínio s

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \qquad RC_1$$

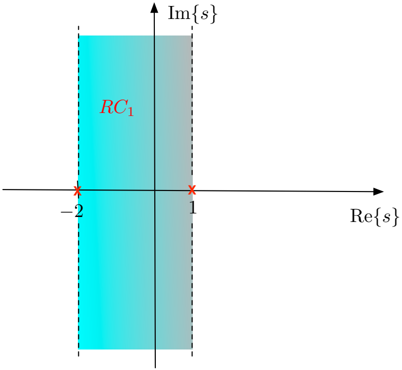
$$e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0), \quad RC_2 \text{ com o limite de } RC_1$$

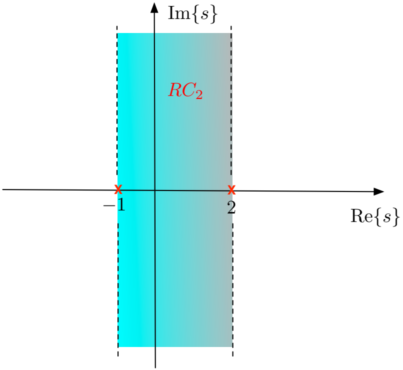
acrescido de $\mathrm{Re}\{s_0\}$

Exemplo

$$x(t) \to X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}, \qquad -2 < \text{Re}\{s\} < 1$$

$$y(t) = e^t\, x(t) \to Y(s) = X(s-1) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$





Escalonamento da variável independente

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC_1$$

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{limites de } RC_2 = a \times \text{limites de } RC_1$$

Um fator $(s-p)$ no denominador de X(s) muda para

$$\frac{1}{a}(s-ap) \quad \text{em} \quad X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$\Rightarrow$ Pólo muda de $s=p$ para $s=ap$

Exemplo

$$x(-t) \leftrightarrow X(-s) \quad RC_2 = -RC_1$$

Convolução

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad RC_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad RC_2$$

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow Y(s) = X_1(s)X_2(s) \quad RC \supseteq RC_1 \cap RC_2$$

RC pode ser maior que $RC_1 \cap RC_2$ se houver cancelamento de polos e zeros

Diferenciação no domínio do tempo

$$
\begin{aligned}
x(t) &\leftrightarrow X(s), \quad RC_1 \\
\frac{dx(t)}{dt} &\leftrightarrow sX(s), \quad RC_2 \supseteq RC_1
\end{aligned}
$$

Diferenciação no domínio s

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(s), \quad RC_1 \\ t\,x(t) &\leftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds}, \quad RC_2 \supseteq RC_1 \end{aligned}$$

Exemplo

$$x(t) = t\,e^{-at}u(t)$$

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Integração no domínio do tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC_1$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \quad RC_2 \supset RC_1 \cap \{\mathsf{Re}\{s\} > 0\}$$

Integração no domínio do tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC_1$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \quad RC_2 \supset RC_1 \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$$

Teorema do valor inicial

Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e não contém impulso ou suas derivadas em $t = 0$, ou seja, $X(S)$ é própria

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Integração no domínio do tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad RC_1$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s), \quad RC_2 \supset RC_1 \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$$

Teorema do valor inicial

Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e não contém impulso ou suas derivadas em $t = 0$, ou seja, $X(S)$ é própria

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Teorema do valor final

Se, além das propriedades acima, $\lim_{t \to \infty} x(t) < \infty$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace Unilateral

$$\boxed{X_u(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt}$$

Região de convergência

Sempre o semi-plano à direita do polo de $X_u(s)$ com maior parte real

Diferenciação no domínio do tempo

Seja

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$Y_u(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Diferenciação no domínio do tempo

Seja

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$Y_u(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt$$

Usando integração por partes

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \qquad u = e^{-st} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -se^{-st}$$

$$Y_u(s) = \left[x(t)e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_u(s) = -x(0^-) + sX_u(s)}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
x(t) &\leftrightarrow X_u(s) \\
\frac{dx(t)}{dt} &\leftrightarrow sX_u(s) - x(0^-) \\
\frac{d^2x(t)}{dt^2} &\leftrightarrow s^2X_u(s) - sx(0^-) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0^-}
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

Solução de Equações Diferenciais Usando a Transformada de Laplace

- Aplica-se a transformada de Laplace à equação diferencial
- Transformada unilateral no caso de haverem condições iniciais
- Explicita-se a expressão da transformada de Laplace da resposta em função dos parâmetros de equação diferencial e da Transformada de Excitação
- Determina-se a transformada inversa para obter a expressão da resposta no domínio do tempo

Exemplo: Determine $y(t)$ para

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

com

$$x(t) = e^{-4t}\,u(t) \qquad \text{e} \quad y(0^-) = 2 \qquad \text{e} \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = \dot{y}(0^-) = 1$$

Exemplo: Determine $y(t)$ para

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6\,y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

com

$$x(t) = e^{-4t}\,u(t) \qquad \text{e} \quad y(0^-) = 2 \qquad \text{e} \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = \dot{y}(0^-) = 1$$

Aplicando a Transformada Unilateral

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2\,Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leftrightarrow sY(s) - y(0^-)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - \underbrace{x(0^-)}_{=0}$$

$$(s^2+5\,s+6)Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-) - 5\,y(0^-) = s\,X(s) + X(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \mathsf{Re}\{s\} > -4$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(s^2+5s+6)}_{\text{polinômio característico}} \quad Y(s) = (s+1)X(s) + (s+5)y(0^-) + \dot{y}(0^-)$$

$$(s^2 + 5\,s + 6)Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-) - 5\,y(0^-) = s\,X(s) + X(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \text{Re}\{s\} > -4$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(s^2 + 5s + 6)}_{\text{polinômio característico}} \quad Y(s) = (s+1)X(s) + (s+5)y(0^-) + \dot{y}(0^-)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+1}{s^2+5+6}}_{H(s)} X(s) + \frac{y(0^-)s + [5y(0^-) + \dot{y}(0^-)]}{s^2 + 5s + 6}$$

$$(s^2 + 5\,s + 6)Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-) - 5\,y(0^-) = s\,X(s) + X(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \text{Re}\{s\} > -4$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(s^2 + 5s + 6)}_{\text{polinômio característico}} \quad Y(s) = (s+1)X(s) + (s+5)y(0^-) + \dot{y}(0^-)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+1}{s^2+5+6}}_{H(s)} X(s) + \frac{y(0^-)s + [5y(0^-) + \dot{y}(0^-)]}{s^2 + 5s + 6}$$

$$Y(s) = \overbrace{\frac{s+1}{\underbrace{(s^2+5s+6)}_{\text{modos naturais}} \quad \underbrace{(s+4)}_{\text{modo forçado}}}}^{\text{Resposta ao Estado Zero}} + \overbrace{\frac{y(0^-)s + [5y(0^-) + \dot{y}(0^-)]}{\underbrace{s^2 + 5s + 6}_{\text{modos naturais}}}}^{\text{Resposta à Entrada Zero}}$$

Substituindo os valores numéricos,

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}} + \underbrace{\frac{2s+11}{(s+2)(s+3)}}$$

$$Y(s) = \overbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{2}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+4}} \quad + \quad \overbrace{\frac{7}{s+2} + \frac{-5}{s+3}}$$

$$Y(s) = \frac{13/2}{s+2} - \frac{3}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}$$

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)}$$

$$y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right] u(t)$$

Resposta ao estado zero

$$y_1(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right] u(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta ao estado zero

$$y_1(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta à entrada zero

$$y_o(t) = \left[7e^{-2t} - 5e^{-3t}\right]u(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta ao estado zero

$$y_1(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta à entrada zero

$$y_o(t) = \left[7e^{-2t} - 5e^{-3t}\right]u(t)$$

Resposta natural

$$y_n(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t}\right]u(t)$$

$$y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta ao estado zero

$$y_1(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

Resposta à entrada zero

$$y_o(t) = \left[7e^{-2t} - 5e^{-3t}\right]u(t)$$

Resposta natural

$$y_n(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t}\right]u(t)$$

Resposta forçada

$$y_f(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

Estabilidade de Sistemas LIT

- A estabilidade é determinada pelos modos naturais do sistema

  $\Rightarrow$ É função da localização das raízes características do sistema

Estabilidade de Sistemas LIT

- A estabilidade é determinada pelos modos naturais do sistema

  $\Rightarrow$ É função da localização das raízes características do sistema

- As raízes características são os zeros do polinômio característico

Estabilidade de Sistemas LIT

- A estabilidade é determinada pelos modos naturais do sistema

  $\Rightarrow$ É função da localização das raízes características do sistema

- As raízes características são os zeros do polinômio característico

  Os zeros do polinômio característico são os polos da função de transferência $H(s)$

Estabilidade de Sistemas LIT

- A estabilidade é determinada pelos modos naturais do sistema

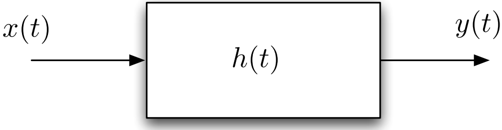
  $\Rightarrow$ É função da localização das raízes características do sistema

- As raízes características são os zeros do polinômio característico

  Os zeros do polinômio característico são os polos da função de transferência $H(s)$

  $\Rightarrow$ A estabilidade é função da localização dos polos de $H(s)$

Obs: A função de transferência é a razão entre as transformada de Laplace da saída e da entrada do sistema, para condições iniciais nulas



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s)$$

Como $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso

- A resposta ao impulso é uma soma ponderada dos modos naturais do sistema

  Para polos de $H(s)$ em $s = s_i, i = 1, \ldots, n$ os modos naturais assumir as seguintes formas:

$$\text{Sistemas Causais} \begin{cases} e^{\sigma_i t}\, u(t), & s_i = \sigma_i \quad \text{reais} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i\, t)\, u(t), & \begin{cases} s_i = \sigma_i + j\omega_i \\ s_i^* = \sigma_i - j\omega_i \end{cases} \end{cases}$$

- A resposta ao impulso é uma soma ponderada dos modos naturais do sistema

Para polos de $H(s)$ em $s = s_i, i = 1, \dots, n$ os modos naturais assumir as seguintes formas:

$$\text{Sistemas Causais} \begin{cases} e^{\sigma_i t}\, u(t), & s_i = \sigma_i \quad \text{reais} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i\, t)\, u(t), & \begin{cases} s_i = \sigma_i + j\omega_i \\ s_i^* = \sigma_i - j\omega_i \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Sistemas Anticausais} \begin{cases} e^{\sigma_i t}\, u(-t), & s_i = \sigma_i \quad \text{reais} \\ e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i\, t)\, u(-t), & \begin{cases} s_i = \sigma_i + j\omega_i \\ s_i^* = \sigma_i - j\omega_i \end{cases} \end{cases}$$

- Condição para estabilidade: $h(t)$ absolutamente integrável

- Condição para estabilidade: $h(t)$ absolutamente integrável

Logo:
Sistemas causais:

Todos os polos de $H(s)$ devem ter parte real negativa

- Condição para estabilidade: $h(t)$ absolutamente integrável

Logo:
Sistemas causais:

Todos os polos de $H(s)$ devem ter parte real negativa

Sistemas anti-causais:

Todos os polos de $H(s)$ devem ter parte real positiva

- Condição para estabilidade: $h(t)$ absolutamente integrável

Logo:
Sistemas causais:

Todos os polos de $H(s)$ devem ter parte real negativa

Sistemas anti-causais:

Todos os polos de $H(s)$ devem ter parte real positiva

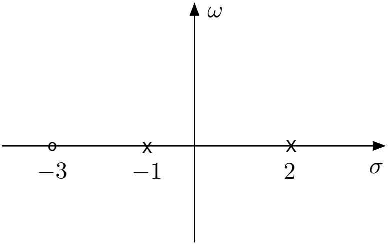
Sistemas não causais $[h(t)$ existe de $-\infty$ a $+\infty]$

- Polos da parte causal de $h(t)$ $[h(t)u(t)]$ no semiplano lateral esquerdo do plano s
- Polos da parte anticausal de $h(t)$ $[h(t)u(-t)]$ no semiplano lateral direito do plano s

$\Rightarrow$ Região de convergência de $H(s)$ deve conter o eixo $s = j\omega$

Exemplo:

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$



Condição para estabilidade

$$R.C. \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 2$$ ← Inclui $\sigma = 0$ (eixo $s = j\omega$)

Neste caso

$$H(s) = \underbrace{\frac{-\frac{2}{3}}{s+1}}_{\text{Re}\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{\frac{5}{3}}{s-2}}_{\text{Re}\{s\}<2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = -\frac{2}{3}\, e^{-t}\, u(t) - \frac{5}{3}\, e^{2t}\, u(-t)}$$