Teoria de Sistemas Lineares

Prof. Bartolomeu F. Uchôa Filho
(Slides adaptados do Prof. Bermudez)

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal de Santa Catarina

0 - Introdução

O que se aprende nesta disciplina?

- O que são sinais
- O que são sistemas
- Como modelar matematicamente sinais e sistemas
- Como e porque representar sinais e sistemas em domínios transformados
- Como usar os modelos para prever o comportamento de sistemas lineares
- Como usar os modelos para projetar de sistemas lineares

0 - Introdução

O que se aprende nesta disciplina?

- O que são sinais
- O que são sistemas
- Como modelar matematicamente sinais e sistemas
- Como e porque representar sinais e sistemas em domínios transformados
- Como usar os modelos para prever o comportamento de sistemas lineares
- Como usar os modelos para projetar de sistemas lineares

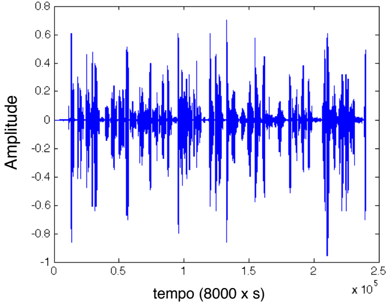
Nosso estudo inclui:

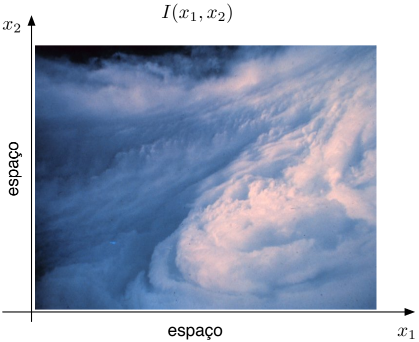
- Estudo de sinais e sistemas contínuos
- Introdução aos sinais e sistemas discretos
- Estudo de sistemas amostrados

I - Sinais e Sistemas

Sinais

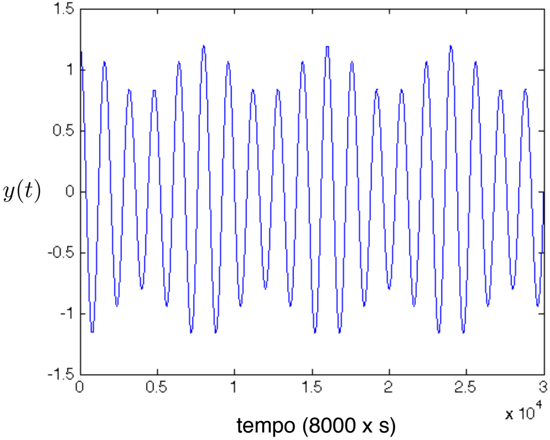
- Conjunto de dados ou informações





- Modelados por funções matemáticas de 1 ou mais var. indep.

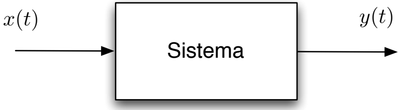
$$x(t) = \cos(10\pi t) \qquad y(t) = x(t)\left[1 + \cos(2\pi t)\right]$$



- Variável independente - não necessariamente tempo
- Tempo será usado no estudo por conveniência e tradição

Sistemas

- Sistemas físicos ou algoritmos matemáticos
- Processam os sinais
- Processamento destina-se a:
  - Extrair informação
  - Incluir informação
  - Modificar informação
- Representação Esquemática



$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t)$$

Aplicações de Sinais e Sistemas em Engenharia

Biomédica

Sinais gerados em órgãos do corpo são medidos para auxílio a diagnóstico

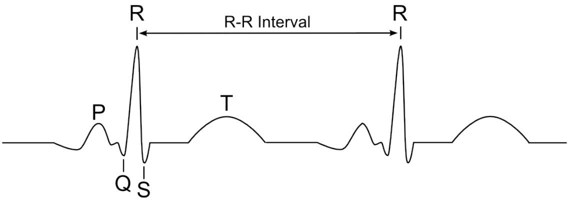


Figure : Sinal de Eletrocardiograma (ECG)

Figure : Sinal de Eletroencefalograma (EEG) de pessoa com eplepsia

Figure : Sinal de ressonância magnética (angiografia)

Controle

Muitos aparelhos precisam ter o seu comportamento controlado por sinais captados do ambiente

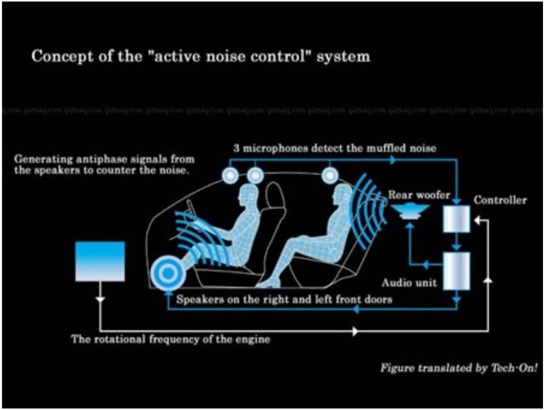


Figure : Controle ativo de ruído (Toyota)

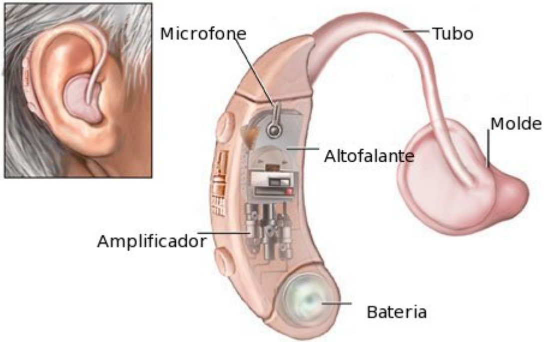


Figure : Realimentação acústica em aparelhos auditivos

Comunicações

Sinais dos mais diversos tipos sofrem transformações para transmissão por sistemas de comunicações

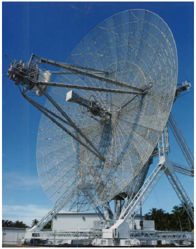
- Gravação: redução de ruído, redução de distorção
- Conversão em sinal digital: amostragem, conversão D/A
- Codificação: PCM, QAM, MPEG, MP3, etc.

- Transmissão:
  - Modulação
  - Conversão em onda eletromagnética (satélite)
  - Conversão em onda luminosa (fibra ótica)
- Recepção:
  As transformações devem ser desfeitas
- Reprodução:
  Volume, equalização, etc.

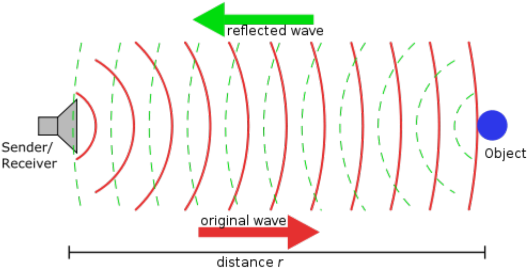
Sonar e Radar

Alterações nos sinais de retorno em relação aos sinas enviados traduzem-se em informações sobre posição, velocidade, e identificação.

Radar:
Ondas eletromagnéticas



Sonar:
Ondas sonoras



Sistemas de Potência

Estudo dos transitórios devido à variação de carga na rede.

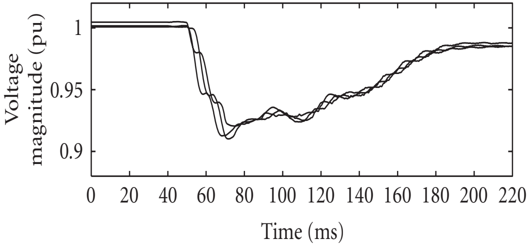


Figure : Transient no valor RMS em uma rede de 400V devido à partida de um motor de indução.

Medidas de intensidade de um sinal

Energia de um Sinal

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

Medidas de intensidade que levam em conta magnitude e duração (Intervalo da var. ind)

Potência de um sinal

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Útil quando $E_x \to \infty$ $(\lim_{t\to\infty} |x(t)| \neq 0)$
- $P_x =$ Valor médio quadrático de $x(t)$

Observações:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \qquad P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

- Há sinais para os quais $E_x \to \infty$ e $P_x \to \infty$

  Exemplo: $x(t) = t$

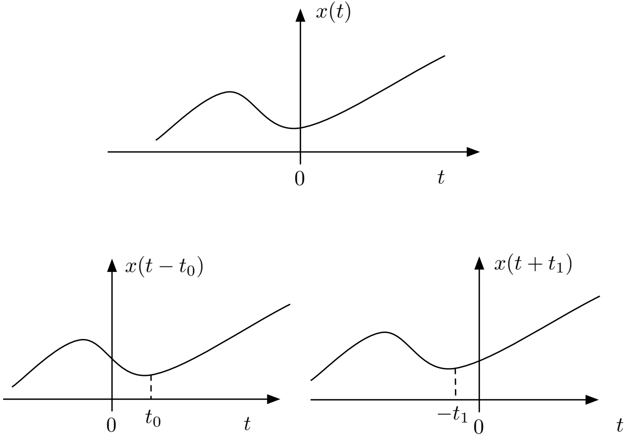
- E_x e P_x são medidas de "capacidade energética" pois não têm unidade de energia
- P_x é muito útil para o estudo de sinais periódicos e de sinais aleatórios

($\star$ Ver exemplo com senóides e exponencial complexa)

Operações Básicas Sobre Sinais

Deslocamento no tempo

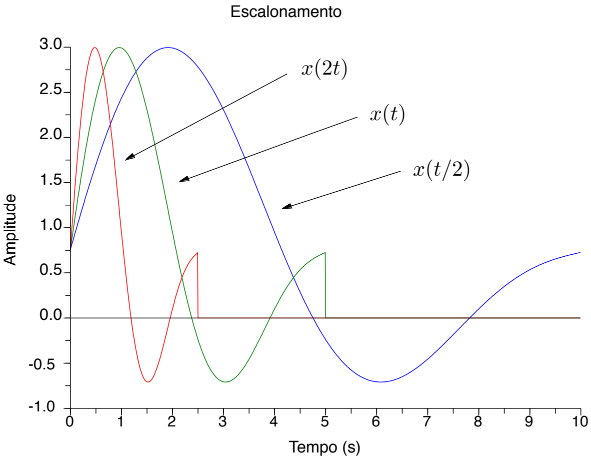
$$x(t) \to x(t - t_0) \qquad (t \to t - t_0)$$



Escalonamento no tempo

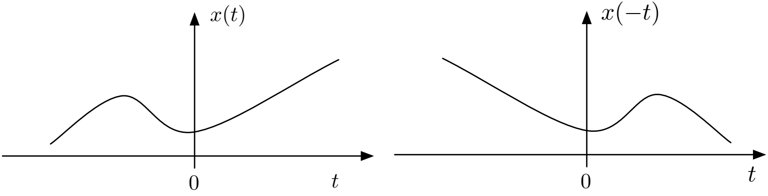
$$x(t) \to x(at) \qquad (t \to at)$$

$$a > 1(\text{compressão}) \qquad a < 1(\text{expansão})$$



Reversão no tempo

$$x(t) \to x(-t) \qquad (t \to -t)$$



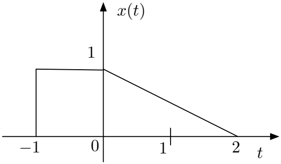
Operações combinadas (transformação afim)

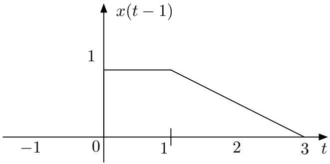
$$x(t) \to x(at-b), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

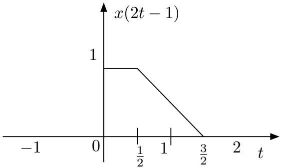
Desmembrando

$$x(t) \xrightarrow{t \to (t-b)} x(t-b) \qquad \leftarrow \text{(deslocamento)}$$

$$x(t-b) \xrightarrow{t \to at} x(at-b) \qquad \leftarrow \text{(escalonamento)}$$





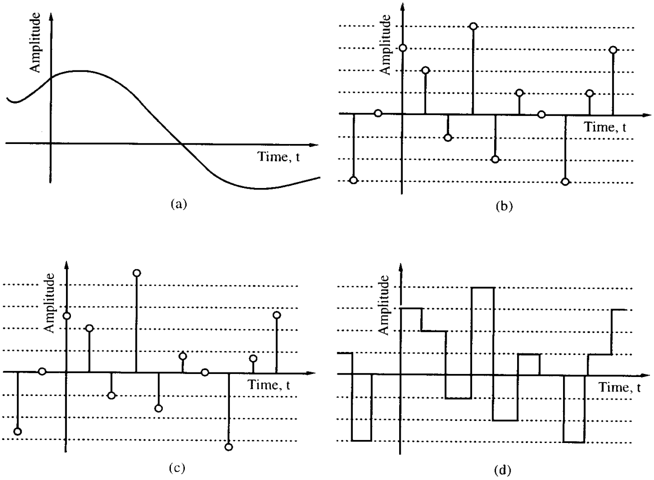


Classificação de Sinais

Sinal Analógico:	Amplitude pode assumir qualquer valor
Sinal Digital:	Amplitude restrita a valores discretos
Sinal Contínuo:	Definido para qualquer valor da variável independente
Sinal Discreto:	Definido apenas para valores discretos da variável independente

Iniciamos nosso estudo com sinais analógicos contínuos

Contínuo   Digital



Discreto   Contínuo Amostrado

Sinais periódicos ou aperiódicos

- Sinais periódicos

$$x(t) = x(t + T_o) \quad \forall t \quad \text{para algum } T_o > 0$$

Menor T_o que satisfaz a igualdade: "Período fundamental"

- Sinal aperiódico: Aquele que não é periódico

Sinais causais, não-causais e anti-causais

- Sinais causais: Sinais que não iniciam antes de $t = 0$

$$x(t) = 0, \quad t < 0$$

- Sinais não-causais: Sinais que iniciam em $t < 0$
- Sinais anti-causais: Sinais tais que $x(t) = 0$, $t > 0$

Sinais de energia e sinais de potência

- Sinal de energia: Têm energia E_x finita
- Sinal de potência: Têm potência P_x finita

Observações:

- Existem sinais que não são nem de energia nem de potência
- Sinais práticos $\rightarrow$ de energia

Sinais pares e sinais ímpares

- Sinal par:

$$x(-t) = x(t)$$

  Simetria entre quadrantes (1,2) e (3,4)

- Sinal ímpar:

$$x(-t) = -x(t)$$

  Simetria entre quadrantes (1,3) e (2 ,4)

Componentes par e ímpar de um sinal

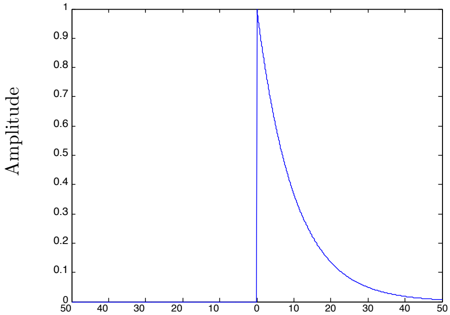
Qualquer sinal pode ser decomposto assim.

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \rightarrow \qquad x_{\text{par}}(-t) = x_{\text{par}}(t)$$

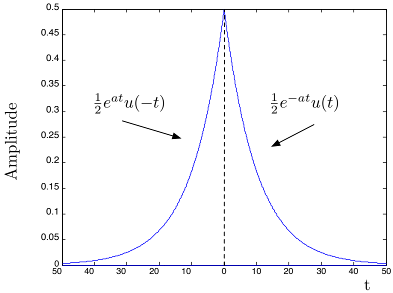
$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \rightarrow \qquad x_{\text{ímpar}}(-t) = -x_{\text{ímpar}}(t)$$

$$x(t) = x_{\text{par}(t)} + x_{\text{ímpar(t)}}$$

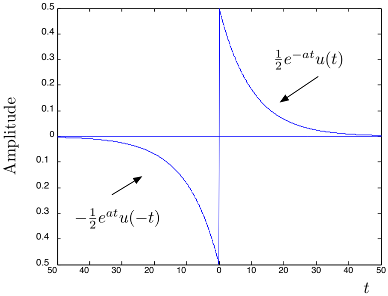
$x(t) = e^{-at}u(t)$



Par $\{e^{-at}u(t)\}$



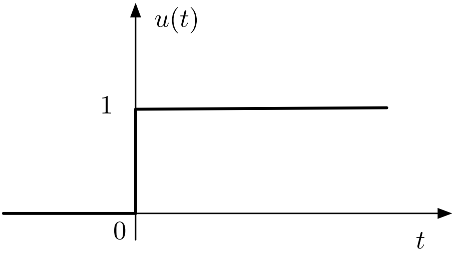
Impar $\{e^{-at}u(t)\}$



Modelos Úteis de Sinais

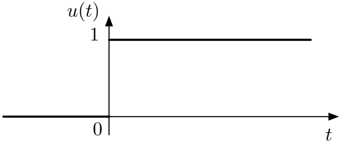
1) Degrau Unitário

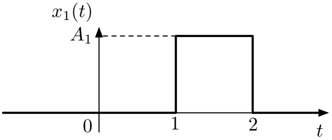
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



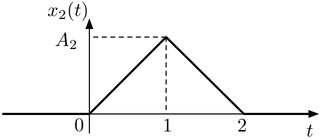
- Modelagem de variações abruptas
- Modelagem de funções contendo pulsos
- Modelagem de funções limitadas no tempo

Exemplo:
Utilização do degrau unitário para a representação de sinais





$$x_1(t) = A_1\big[u(t-1) - u(t-2)\big]$$



$$x_2(t) = A_2 t\big[u(t) - u(t-1)\big] - A_2(t-2)\big[u(t-1) - u(t-2)\big]$$

2) Impulso Unitário (Impulso de Dirac)

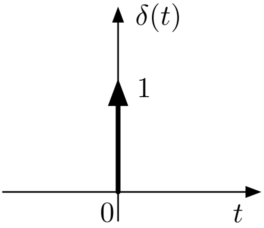
Funcional definido a partir de suas propriedades

Propriedades do impulso unitário

a) $\delta(t) = 0,\ t \neq 0$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} x(t_o)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$



Relação entre degrau e impulso unitários

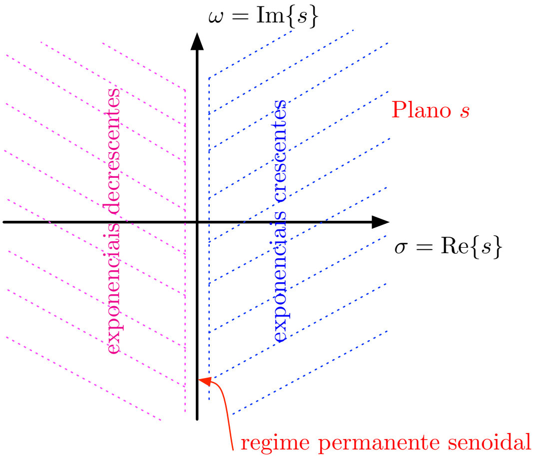
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

3) Função Exponencial

$$x(t) = e^{st}, \qquad s = \sigma + j\omega, \qquad j = \sqrt{-1}$$

- $s = 0 \qquad x(t) = ke^{st} = k \qquad$ (constante)
- $s = \sigma \qquad (\omega = 0) \qquad x(t) = e^{\sigma t} \qquad$ (exponencial monotônica)
- $s = j\omega \qquad (\sigma = 0) \qquad x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)$
- $s = \sigma \pm j\omega \rightarrow x(t) = e^{\sigma t}[\cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)]$

Regiões do Plano s



Sistemas

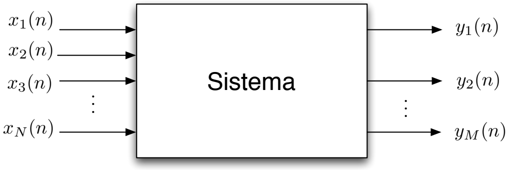
Processam Sinais

- Modificam com alguma finalidade
- Modificam indesejavelmente
- Facilitam a extração de informações

Podem ser implementados

- Em hardware (usando componentes físicos)
- Em software (algoritmos numéricos)

Representação como blocos (entrada/saída)



O estudo de sistemas engloba

- Modelagem matemática
- Análise
- Projeto (Síntese)

Classificação de Sistemas

1) Linear

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \rightarrow a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)$$

Resposta de um sistema linear

Resposta à entrada zero

$+$

Resposta ao estado zero

Exemplo: $y(t) = 2\,t\,x(t-1)$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2\,t\,x_1(t-1)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2\,t\,x_2(t-1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t) \rightarrow & 2\,t\,[a_1\,x_1(t-1) + a_2\,x_2(t-1)] \\ & = a_1\,y_1(t) + a_2\,y_2(t) \quad \text{(Linear)} \end{aligned}$$

Exemplo: $y(t) = x(t) + 1$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t) + 1$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t) + 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \rightarrow & a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) + 1 \\ & \neq a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t) \quad \text{(Não Linear)} \end{aligned}$$

OBS: Este sistema é *incrementalmente linear*.

Exemplo: $y(t) = x^2(t)$

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2^2(t)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \to & [a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t)]^2 \\ & \neq a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t) \quad \text{(Não Linear)} \end{aligned}$$

2) Variante ou invariante no tempo

$$\begin{array}{c} x(t) \to y(t) \\ x(t-t_0) \to y(t-t_0) \end{array} \quad \Rightarrow \text{Invariante no tempo}$$

2) Variante ou invariante no tempo

$$\begin{array}{c} x(t) \to y(t) \\ x(t-t_0) \to y(t-t_0) \end{array} \quad \Rightarrow \text{Invariante no tempo}$$

Exemplo: $y(t) = \text{sen}[x(t)]$

$$x(t) \to y(t) = \text{sen}[x(t)]$$
$$x_1(t) = x(t-t_0) \to y_1(t) = \text{sen}[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

$\Rightarrow$ (Invariante no Tempo)

Exemplo: $y(t) = \text{sen}(t)\, x(t-2)$

$$x(t) \rightarrow y(t) = \text{sen}(t)\, x(t-2)$$
$$x_1(t) = x(t-t_0) \rightarrow y_1(t) = \text{sen}(t)\, x(t-t_0-2) \neq y(t-t_0)$$

Porque $\quad y(t-t_0) = \text{sen}(t-t_0)\, x(t-t_0-2)$

$\Rightarrow$ (Variante no Tempo)

3) Instantâneo (sem memória) ou dinâmico

$y(t_0)$ depende "exclusivamente" de $x(t_0)$ $\rightarrow$ sem memória

3) Instantâneo (sem memória) ou dinâmico

$y(t_0)$ depende "exclusivamente" de $x(t_0)$ $\rightarrow$ sem memória

Exemplo: $y(t) = (t-3)\,x(t)$

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0)$$

$y(t_0)$ depende de $x(t)$ apenas em $t = t_0$ $\Rightarrow$ (Sem Memória)

3) Instantâneo (sem memória) ou dinâmico

$y(t_0)$ depende "exclusivamente" de $x(t_0)$ $\rightarrow$ sem memória

Exemplo: $y(t) = (t-3)\,x(t)$

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0)$$

$y(t_0)$ depende de $x(t)$ apenas em $t = t_0$ $\Rightarrow$ (Sem Memória)

Exemplo: $y(t) = (t-3)\,x(t+1)$

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0 + 1)$$

$y(t_0)$ depende de $x(t_0+1)$ $\Rightarrow$ (Com Memória)

Exemplo: Resistência constante (sem memória)

$$v(t) = R\,i(t) \qquad \text{Entrada: } i(t), \quad \text{Saída: } v(t)$$

$$i(t) = G\,v(t) \qquad \text{Entrada: } v(t), \quad \text{Saída: } i(t)$$

Exemplo: Resistência constante (sem memória)

$$v(t) = R\,i(t) \qquad \text{Entrada: } i(t), \quad \text{Saída: } v(t)$$

$$i(t) = G\,v(t) \qquad \text{Entrada: } v(t), \quad \text{Saída: } i(t)$$

Exemplo: Capacitância constante (com memória)

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

4) Causal ou não-causal

Sistema causal não é antecipativo:

$\Rightarrow y(t_0)$ depende apenas de $x(t)$, $t \leq t_0$

Exemplo: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$

$y(t_0)$ depende de $x(t)$ em $(\infty, t_0 - 1]$ $\Rightarrow$ (Causal)

Exemplo: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$

$y(t_0)$ depende de $x(t)$ em $(\infty, t_0 - 1] \Rightarrow$ (Causal)

Exemplo: $y(t) = 3\, x^2(t-1) + 2\, x(t+3)$

$y(t_0)$ depende de $x(t)$ em $t = t_0 - 1$ e $t = t_0 + 3 \Rightarrow$ (Não Causal)

5) Invertível ou não-invertível

$x(t) \to y(t)$

É possível determinar $x(t)$ unicamente a partir de $y(t)$?

$\Rightarrow$ Invertível

Exemplo: $y(t) = 4\,x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,y(t)$$

$x(t)$ pode ser determinado unicamente a partir de $y(t)$ (Invertível)

Exemplo: $y(t) = 4\,x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,y(t)$$

$x(t)$ pode ser determinado unicamente a partir de $y(t)$ (Invertível)

Exemplo: $y(t) = x^2(t)$

$$x(t) = \pm\sqrt{y(t)}$$

(Não Invertível)

6) Estável ou instável (BIBO - *Bounded Input Bounded Output*)

Estável: qualquer entrada limitada $\rightarrow$ saída limitada

Exemplo: $y(t) = e^{-|x(t)|}$

$|y(t)| < \infty$ para qualquer $x(t)$ (Estável)

Exemplo: $y(t) = e^{-|x(t)|}$

$|y(t)| < \infty$ para qualquer $x(t)$ (Estável)

Exemplo: $y(t) = t\,x(t)$

$\lim_{t \to \infty} y(t) \to \infty$ se $x(t) = K$ (Instável)

Exemplo: $y(t) = e^{-|x(t)|}$

$|y(t)| < \infty$ para qualquer $x(t)$ (Estável)

Exemplo: $y(t) = t\,x(t)$

$\lim_{t\to\infty} y(t) \to \infty$ se $x(t) = K$ (Instável)

OBS: Para instabilidade basta encontrar *um* exemplo. Sistemas estáveis são estáveis para *qualquer* $x(t)$.

7) Contínuo ou discreto

Contínuo: Entrada e saída são sinais contínuos

Discreto: Entrada e saída são sinais discretos

7) Contínuo ou discreto

<u>Contínuo</u>: Entrada e saída são sinais contínuos

<u>Discreto</u>: Entrada e saída são sinais discretos

8) Analógicos e Digitais

<u>Analógicos</u>: entrada e saída são sinais analógicos

<u>Digitais</u>: Entrada e saída são sinais digitais

II- Análise no Domínio do Tempo de Sistemas LIT

- Estudo de sistemas caracterizados por eqs. diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_1 \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_{N-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_N y(t)$$

$$= b_0 \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_1 \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \ldots + b_{M-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_M x(t)$$

- Casos de interesse prático: $N \geq M$
- Se $M > N$, $y(t)$ será função de $\dfrac{dx(t)}{dt}$ e de suas derivadas $\rightarrow$ Não é Bom
- Sistemas diferenciadores são instáveis

$$u(t) \rightarrow \delta(t)$$

- A saída é proporcional à derivada do sinal de entrada
  - Sinais rápidos $\longrightarrow$ saídas elevadas
  - Amplificam ruído de alta frequência e prejudicam a RSN em várias aplicações

Solução da Equação Diferencial

Operador diferencial:

$$Dx(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad Dy(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

usando na equação (com $M = N$):

$$\underbrace{(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N)}_{Q(D)} y(t)$$

$$= \underbrace{(b_o D^N + b_1 D^{N-1} + \ldots + b_{N-1} D + b_N)}_{P(D)} x(t)$$

$$\boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)}$$

2 partes da solução

- Solução da eq. homogênea $(x(t) = 0) \rightarrow y_0(t)$
- Solução particular $\rightarrow y_p(t)$

  $$y(t) = y_o(t) + y_p(t)$$

  com constantes determinadas pelas condições auxiliares

Decomposição Alternativa

- Resposta à entrada zero

  $x(t) = 0 +$ condições auxiliares (apenas solução homogênea)

- Resposta ao estado zero
  Resposta completa com condições auxiliares nulas
  (solução homogênea + solução particular)

Resposta à Entrada Zero

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \ldots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0, \quad \forall t$$

- $Q(D)$ é um operador
- $y_0(t)$ deve ter a mesma forma de suas derivadas

$$\Rightarrow y_0(t) = ce^{st}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

- Aplicando o operador

$$\begin{aligned} Dy_0(t) &= cse^{st} \\ D^2 y_0(t) &= cs^2 e^{st} \\ &\vdots \\ D^N y_0(t) &= cs^n e^{st} \end{aligned}$$

- Substituindo na equação

$$\left(s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_{N-1} s + a_N\right) c e^{st} = 0 \quad \text{(agora é produto)}$$

$$c\, Q(s) e^{st} = 0$$

- $Q(s)$ não é função de t
- A equação deve valer para todo t
- Soluções:

$$y_{0_k}(t) = c_k e^{s_k t}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

com s_k tais que $Q(s)\big|_{s=s_k} = 0$

- $Q(s) = s^N + a_1 s^{N-1} + \ldots + a_N$: Polinômio característico
- Raízes s_k de $Q(s)$
  - Valores característicos
  - Autovalores
  - Raízes características
  - Frequências Naturais

  ... do sistema

- Exponenciais $e^{s_k t}$, $k = 1, \ldots, N$
  - Modos característicos
  - Modos naturais
  - Modos

  ... do sistema

Se as N raízes são distintas

$$e^{s_1 t}, \ldots, e^{s_N t} \qquad \text{são soluções distintas}$$

Essas soluções formam um sistema fundamental de soluções

$\Rightarrow$ Solução geral

$$\boxed{y_0(t) = c_1\, e^{s_1 t} + c_2\, e^{s_2 t} + \ldots + c_N\, e^{s_N t}}$$

O que acontece no caso de raízes duplas?

Eq. diferencial homogênea

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + b\,y(t) = 0$$

- $y(t) = c\,e^{st}$ é solução da equação
- Equação característica

$$c\,(D^2 + aD + b)e^{st} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad s^2 + as + b = 0$$

- Raízes duplas quando

$$\triangle = a^2 - 4b = 0 \qquad \Rightarrow b = \frac{1}{4}a^2$$

$$\Rightarrow s_1 = -\frac{a}{2} \quad e \quad y_1(t) = c_1 e^{s_1 t} = c_1 e^{-\frac{a}{2}t}$$

- Como obter uma $2^{\underline{a}}$ solução para compor a solução geral?
- As duas soluções devem ser linearmente independentes

$$a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t) = 0 \qquad \text{sss} \qquad a_1 = a_2 = 0$$

Teorema: A solução $y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ é uma solução geral da equação homogênea

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f(t)\,\frac{dy(t)}{dt} + g(t)\,y(t) = 0$$

em um intervalo I do eixo t se e somente se o quociente $y_1(t)/y_2(t)$ não for constante em I, mas depender da variável independente t

- Logo, devemos ter

$$y_2(t) = c_2\,\phi(t)\,y_1(t)$$

- Substituindo $y_2''(t)$ e $y_2'(t)$ na eq. diferencial e rearrumando,

$$\phi(t)\Big[\underbrace{y_1''(t) + a\,y_1'(t) + \frac{1}{4}a^2\,y_1(t)}_{A}\Big] + \phi'(t)\Big[\underbrace{2\,y_1'(t) + a\,y_1(t)}_{B}\Big] + \phi''(t)\,y_1(t) = 0$$

$$\phi(t)\underbrace{\left[\, y_1''(t) + a\, y_1'(t) + \frac{1}{4}a^2\, y_1(t)\,\right]}_{A}$$

$$+\, \phi'(t)\left[\,\underbrace{2\, y_1'(t) + a\, y_1(t)}_{B}\,\right] + \phi''(t)\, y_1(t) = 0$$

- $A = 0$ porque $y_1(t)$ é solução da eq. dif. homogênea
- Substituindo $y_1(t) = c_1 e^{-\frac{a}{2}t}$ e $y_1'(t) = -\frac{a}{2}c_1 e^{-\frac{a}{2}t}$ em (B), vemos que $B = 0$
- Logo $\phi(t)$ é dado pela solução de

$$\boxed{\phi''(t)\, y_1(t) = 0}$$

- Para $\phi''(t)\, y_1(t) = 0 \qquad \forall y_1(t)$

$$\phi''(t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\phi(t) = t}$$

- Assim

$$y_2(t) = c_2\, t\, e^{s_1 t} = c_2\, t\, y_1(t)$$

- Solução geral para raízes duplas em $s = s_1$

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{s_1 t}$$

- A análise pode ser estendida para raízes de multiplicidade k

  As soluções serão

$$e^{s_1 t}, t\, e^{s_1 t}, t^2\, e^{s_1 t}, \ldots, t^{k-1}\, e^{s_1 t}$$

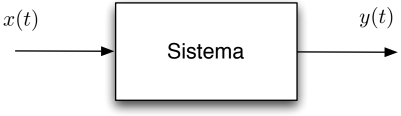
Resposta ao Estado Zero

Representação de sinais em termos de impulsos

Dadas as propriedades do impulso unitário, sempre podemos escrever

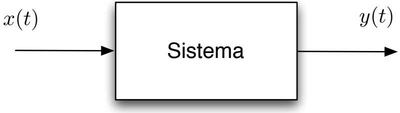
$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

Resposta de um sistema LIT ao impulso unitário



$$\delta(t) \qquad \rightarrow \qquad h(t)$$ (resposta ao impulso)

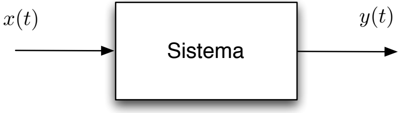
Resposta de um sistema LIT ao impulso unitário



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \qquad \text{(resposta ao impulso)}$$

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \qquad \text{(inv. no tempo)}$$

Resposta de um sistema LIT ao impulso unitário

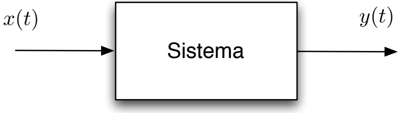


$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t)$ (resposta ao impulso)

$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau)$ (inv. no tempo)

$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau)$ (linearidade)

Resposta de um sistema LIT ao impulso unitário



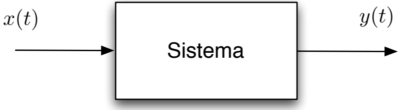
$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t)$ (resposta ao impulso)

$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau)$ (inv. no tempo)

$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau)$ (linearidade)

$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ (linearidade)

Resposta de um sistema LIT ao impulso unitário



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \qquad \text{(resposta ao impulso)}$$

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \qquad \text{(inv. no tempo)}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau) \qquad \text{(linearidade)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \ \text{(linearidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

Troca de variáveis

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Notação

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Cálculo da integral de convolução

i) $x(t) \quad \rightarrow \quad x(\tau)$ (troca do nome da variável)

Cálculo da integral de convolução

i) $x(t) \quad \rightarrow \quad x(\tau)$ (troca do nome da variável)

ii) $h(t) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau)$

  a) $t \rightarrow \tau \quad \Rightarrow h(t) \rightarrow h(\tau)$ (troca do nome da variável)

Cálculo da integral de convolução

i) $x(t) \quad \rightarrow \quad x(\tau)$ (troca do nome da variável)

ii) $h(t) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau)$

- a) $t \rightarrow \tau \qquad \Rightarrow h(t) \rightarrow h(\tau)$ (troca do nome da variável)
- b) $\tau \rightarrow -\tau \qquad \Rightarrow h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$ (reflexão)

Cálculo da integral de convolução

i) $x(t) \quad \rightarrow \quad x(\tau)$ (troca do nome da variável)

ii) $h(t) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau)$

a) $t \rightarrow \tau \qquad \Rightarrow h(t) \rightarrow h(\tau)$ (troca do nome da variável)

b) $\tau \rightarrow -\tau \qquad \Rightarrow h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$ (reflexão)

c) $\tau \rightarrow \tau - t \qquad \Rightarrow h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$ (deslocamento)

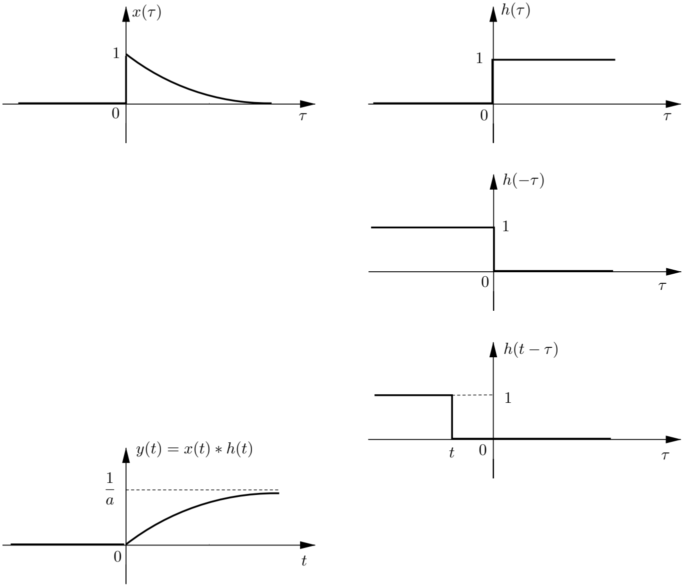
iii) Para cada valor de t

a) Calcular $x(\tau)h(t-\tau)$

b) Integrar o produto de $\tau = -\infty$ a $\tau = +\infty$

Resultado: $y(t)$

Exemplo: $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0; \quad h(t) = u(t)$



Solução analítica

$$h(t) = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau > 0 \quad \text{ou} \quad \tau < t \\ 0, & t-\tau < 0 \quad \text{ou} \quad \tau > t \end{cases}$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \quad {\color{red}(x(\tau) = 0, \tau < 0)} \\ 0, & \tau < 0 \quad \text{e} \quad \tau > t \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau, \quad t > 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{a}(e^{-at} - 1); t > 0$$

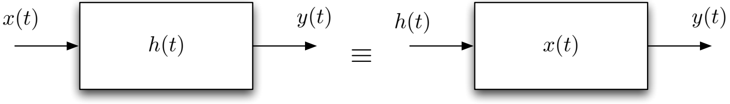
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)u(t)}$$

$u(t)$ porque $y(t) = 0,\ t < 0$

Propriedades de Sistemas LIT

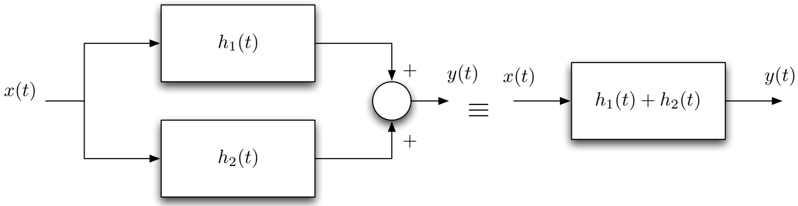
Comutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



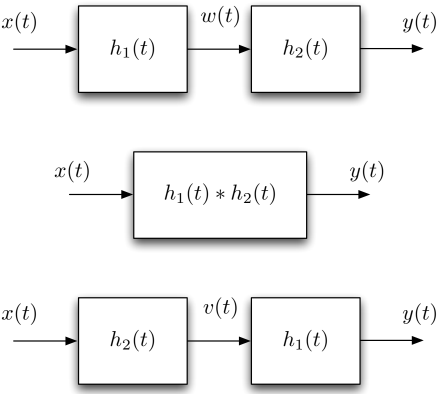
Distributiva

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Associativa

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$



Sistema LIT sem memória

Para que o sistema seja LIT e sem memória

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)x(t-\tau)}_{\Rightarrow\ h(\tau)=0,\ \forall\tau\neq 0}\, d\tau = K\,x(t), \quad \forall\, x(t) \text{ e } K = \text{cte}$$

Para $h(\tau) = 0,\ \forall\tau \neq 0$

$$y(t) = \int_{0^-}^{0^+} h(\tau)x(t)\,d\tau = x(t)\int_{0^-}^{0^+} h(\tau)\,d\tau = K\,x(t)$$

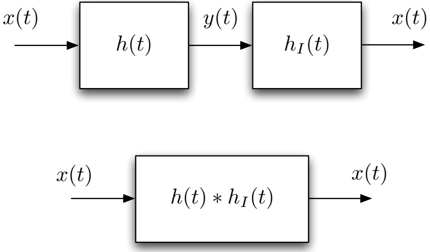
$$\Rightarrow \boxed{h(t) = K\delta(t)}$$

Obs: Para $K = 1, h(t) = \delta(t)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

Invertibilidade de sistemas LIT

$h(t)$: Resposta ao impulso do sistema
$h_I(t)$: Resposta ao impulso do sistema inverso



$$\Rightarrow \boxed{h(t) * h_I(t) = \delta(t)}$$

Exemplo:

$y(t) = x(t - t_0)$ (Sistema atraso ideal)

$h(t) = \delta(t - t_0)$

Como $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Convoluir } x(t) \text{ com um impulso desloca } x(t) \text{ para onde ocorre o impulso}}$

Sistema Inverso $h_I(t) * y(t) = h_I(t) * x(t - t_0) = x(t)$ $\quad t \rightarrow t + t_0$

$$\Rightarrow \boxed{h_I(t) = \delta(t + t_0)}$$

Causalidade de sistemas LIT

Em $t = t_0$

$$y(t_0) = x(t) * h(t)\Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau$$

Para que $y(t_0)$ independa de $x(t)$ para $t > t_0$

$$\Rightarrow \boxed{h(t_0 - \tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau > t_0}$$

Fazendo a troca de variáveis $t = t_0 - \tau$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = 0, \quad t < 0}$$

Estabilidade de sistemas LIT (BIBO)

$x(t)$ limitado $\Rightarrow \quad \big|x(t)\big| \leq B \quad \forall\, t$, e para B finito

Estabilidade: $|y(t)| < \infty, \quad \forall\, t$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau$$
$$\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Como $B < \infty$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

$\Rightarrow h(t)$ é absolutamente integrável

Relação entre Resposta ao Impulso e ao Degrau

$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t)$

$u(t) \quad \rightarrow \quad s(t) \quad$ (Notação)

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Como $u(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$,

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau}$$

Do Cálculo

$$\boxed{h(t) = \frac{ds(t)}{dt}}$$

Resposta Completa do Sistema LIT

Sistema de ordem N (Eq. diferencial de ordem N)

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}}_{\text{Resp. à entrada zero}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\text{Resp. ao estado zero}}$$

Obs: Com eventuais alterações na resposta à entrada zero no caso de frequências naturais múltiplas